

## Topologia, Seria 3:

**Zadanie 1.** Topologia lewych przedziałów na liczbach rzeczywistych jest zadana przez

$$\mathcal{T}_l = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) | x \in \mathbb{R}\}.$$

Rozważmy podzbiory płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$ :

$$\Delta_1 = \{(x, -x) | x \in \mathbb{R}\}, \quad \Delta_2 = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\},$$

z topologiami podprzestrzeni topologii produktowej  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_l \times \mathcal{T}_l)$ .

- a) Uzasadnij, że przestrzeń  $\Delta_1$  jest homeomorficzna z prostą euklidesową  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(d_{eu}))$ .
- b) Stwierdź czy przestrzenie  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  są homeomorficzne?

**Zadanie 2.** Rozważmy topologię euklidesową na  $\mathbb{R}^2$ . Niech

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0, y = 0\}.$$

Uzasadnij, że przestrzeń  $\mathbb{R}^2/A$  z topologią ilorazową jest  $T_0$ , ale nie jest  $T_1$ .

**Zadanie 3.** Rostrzygnij, czy diagonalą  $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$  jest domknięta w topologii produktu  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , gdzie na pierwszej kopii  $\mathbb{R}$  rozważamy topologię euklidesową, a na drugiej topologię strzałki.

**Zadanie 4.** Niech  $(X, \mathcal{T})$  będzie przestrzenią topologiczną, a  $\equiv$  relacją równoważności na  $X$ .

- a) Załóżmy, że  $\mathcal{T}$  jest topologią dyskretną. Czy przestrzeń  $X/\equiv$  musi być dyskretna?
- b) Załóżmy, że  $\mathcal{T}$  jest topologią koskończoną (Zariskiego). Uzasadnić, że topologia koskończona na  $X/\equiv$  jest bogatsza niż topologia ilorazowa.