

Zadanie 1. Niech $(C[0, 1], d_{\text{sup}})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z odcinka $[0, 1]$ w liczby rzeczywiste, wyposażoną w metrykę supremum. Rozważmy podzbiór

$$A = \{f \in C[0, 1] \mid \exists_{x \in [0, 1]} f(x) > f(0)\}$$

Sprawdzić czy ten podzbiór jest otwarty?

Zadanie 2. Rozważmy płaszczyznę z metryką rzeki $(\mathbb{R}^2, d_r)$ i podzbiór $A := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$. Sprawdzić czy punkt p należy do domknięcia $\overline{A}$, gdy

a) $p = (\sqrt{3}, 1)$,

b) $p = (\sqrt{3}, 0)$.

Zadanie 3. Niech d_r oznacza metrykę rzeki, a d_k metrykę kolejową na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Rozważmy funkcję $f : (\mathbb{R}^2, d_k) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_r)$ daną wzorem

$$f(x, y) = (y, x).$$

Sprawdzić czy f jest ciągła w punkcie p , gdy

a) $p = (1, 1)$,

b) $p = (1, 0)$.

Zadanie 4. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, a $A \subset X$ podzbiorem. Załóżmy, że A ma skończenie wiele elementów. Uzasadnić, że jego dopełnienie $X - A$ jest podzbiorem otwartym w (X, d) .