Teoria deformacji i przestrzenie moduli
Seria I zadań, na 9 października

Na pierwszym wykładzie dowiemy się, że przestrzenie moduli to ładna nazwa na badanie funktorów reprezentowalnych $F\colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$, czyli ogólniej $F\colon \mathbf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathbf{Set}$, gdzie $\Bbbk$ jest ustalonym pierścieniem bazowym. Zachodzi $\mathbf{Ring} = \mathbf{Alg}_{\mathbb{Z}}$, więc przeważnie będziemy używać $\mathbf{Alg}$.

Poniższe ćwiczenia są musztrujące: przede wszystkim mają na celu nauczenie się pracy z funktorami reprezentowanymi. Trudność jest bardzo różna, więc mam nadzieję, że każdy znajdzie coś dla siebie. Natomiast zadania są raczej mało umotywowane.

Zadanie 1.
(a) Niech $F\colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$ będzie zadany przez $F(A) = A$. Pokaż, że F jest reprezentowany przez $\mathbb{Z}[x]$.
(b) Niech $\Bbbk$ będzie pierścieniem i rozważmy ten sam funktor F ale jako $F\colon \mathbf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathbf{Set}$. Czy F jest reprezentowany i, jeśli tak, przez jaki pierścień?
(c) Niech $\Bbbk$ będzie pierścieniem i niech $F\colon \mathbf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathbf{Set}$ będzie zadany przez $F(A) = A^{\times}$, gdzie $A^{\times}$ jest zbiorem elementów odwracalnych. Czy F jest reprezentowany i, jeśli tak, przez jaki pierścień?

Zadanie 2 (ang. *jump phenomenon*)**.** Niech $\Bbbk$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym i niech d będzie liczbą całkowitą dodatnią. Funktor $\mathcal{F}in\mathcal{A}lg_d\colon \mathbf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathbf{Set}$ jest zadany następująco. Dla $\Bbbk$-algebry A zbiór $\mathcal{F}in\mathcal{A}lg_d(A)$ jest zbiorem klas izomorfizmu A-algebr postaci $A \to B$, gdzie B jest wolnym A-modułem rangi d.

(a) Dokończ definicję funktora $\mathcal{F}in\mathcal{A}lg_d$, mówiąc, jak jest on zadany na morfizmach $A \to A'$.
(b) Pokaż, że zbiór $\mathcal{F}in\mathcal{A}lg_2(\Bbbk)$ jest dwuelementowy.
(c) Pokaż, że $A = \Bbbk[t] \to B = \Bbbk[x,t]/(x^2 - t)$ daje dobry element $\eta \in \mathcal{F}in\mathcal{A}lg_2(\Bbbk[t])$. Dla każdego $\lambda \in \Bbbk$, opisz, element $\eta|_{t=\lambda} \in \mathcal{F}in\mathcal{A}lg_2(\Bbbk)$.
(d) Załóżmy, że F jest reprezentowany przez $\Bbbk$-algebrę R. Niech $R \to \Bbbk[t]$ będzie homomorfizmem odpowiadającym η. Pokaż, że indukowane odwzorowanie $\operatorname{Spec}(\Bbbk[t]) \to \operatorname{Spec}(R)$ posyła każdy niezerowy $\Bbbk$-punkt na jeden element $\mathcal{F}in\mathcal{A}lg_2(\Bbbk)$, zaś $\Bbbk$-punkt $0 \in \operatorname{Spec}(\Bbbk[t])$ na inny element $\operatorname{Spec}(R)$.
(e) Sprawdź, że nie istnieje $R \to \Bbbk[t]$ spełniające warunki poprzedniego podpunktu i wywnioskuj, że $\mathcal{F}in\mathcal{A}lg_2$ nie jest reprezentowany. *Wskazówka: $\Bbbk$-punkty są zawsze domknięte.*

Zadanie 3. Niech $\Bbbk$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym i niech d będzie liczbą całkowitą dodatnią. Niech funktor $\operatorname{Hilb}_d(\mathbb{A}^1)\colon \mathbf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathbf{Set}$ przyporządkowuje $\Bbbk$-algebrze A zbiór ideałów $I \subseteq A[x]$ takich, że iloraz $A[x]/I$ jest wolnym A-modułem rangi d.

(a) Pokaż, że zbiór $\operatorname{Hilb}_d(\mathbb{A}^1)(\Bbbk)$ jest w bijekcji z $\Bbbk^d$. *Wskazówka: rozwiń definicje i pamiętaj, że $\Bbbk[x]$ jest PIDem.*
(b) Skonstruuj odwzorowanie $\operatorname{Hilb}_d(\mathbb{A}^1) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Alg}_{\Bbbk}}(\Bbbk[x_1, \ldots, x_d], -)$ bijektywne na punktach,
(c) $\star$ Skonstruuj odwzorowanie jak powyżej i pokaż, że jest ono izomorfizmem.