Zadania przygotowujące do 2. kolokwium z Algebry Przemiennej.

Drugie kolokwium odbędzie się 15 stycznia o 8:30 zamiast wykładu. Będzie trwać 90 minut.

Kolokwium będzie się składać z czterech zadań. Dwa z nich będą wzięte z listy poniżej zaś dwa z serii VII – XII zadań domowych. Żadne z zadań wziętych z serii zadań domowych nie będzie jednym z „zadań dodatkowych".

Na kolokwium można powoływać się na twierdzenia z wykładu. Można też powoływać się na zadania z ćwiczeń (oczywiście poza zadaniem, które pojawi się na kolokwium). Należy **dokładnie sformułować** stwierdzenie, którego używamy.

W razie pytań lub wątpliwości, proszę pisać.

Zadanie 1

Podaj przykład skończenie generowanej $\mathbb{C}$-algebry A oraz maksymalnych ideałów $\mathfrak{p} \subset A$ oraz $\mathfrak{q} \subset A$ takich, że $\dim(A_\mathfrak{p}) \neq \dim(A_\mathfrak{q})$.

Zadanie 2

Niech $I = (xy + yz + zx, xyz) \subset S = \mathbb{C}[x, y, z]$. Niech $V(I) \subset \mathbb{C}^3$ będzie odpowiadającym mu zbiorem algebraicznym.

1. Znajdź składowe $V(I)$.
2. Czy istnieje $f \in S$ takie, że $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in V(I)$, ale $f \notin I$?

Zadanie 3

Podaj przykład ideału pierwszego $\mathfrak{p} \subset \mathbb{C}[x, y]$ takiego, że odpowiadający mu zbiór algebraiczny $V := V(\mathfrak{p}) \subset \mathbb{C}^2$ spełnia warunek: $V \cap \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2$ jest niepusty i niespójny względem topologii Euklidesowej.

Zadanie 4

Niech $I \subset B$ będzie ideałem prymarnym, zaś $f\colon A \to B$ będzie homomorfizmem. Pokaż, że $f^{-1}(I)$ jest prymarny.

Zadanie 5

Niech A będzie pierścieniem Noetherowskim.

1. Niech A będzie dziedziną. Znajdź $\operatorname{Ass}(A)$.
2. Niech A będzie pierścieniem zredukowanym takim, że $|\operatorname{Ass}(A)| = 1$. Pokaż, że A jest dziedziną.
3. Podaj przykład pierścienia A takiego, że $|\operatorname{Ass}(A)| = 1$, ale A nie jest dziedziną.

Zadanie 6

Niech K będzie ciałem z waluacją dyskretną i niech A będzie pierścieniem waluacji. Uzasadnij, że elementy odwracalne w pierścieniu A to dokładnie elementy A o waluacji zero.

Zadanie 7

Niech A będzie pierścieniem waluacji dyskretnej, zaś K jego ciałem ułamków. Uzasadnij, że istnieje element $a \in A$ taki, że $S^{-1}A = K$ dla $S = \{1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots\}$.

Zadanie 8

Niech A będzie pierścieniem waluacji dyskretnej, zaś K jego ciałem ułamków. Niech $B \subset K$ będzie podpierścieniem. Pokaż, że jeżeli $A \subset B$, to $B = A$ lub $B = K$.

Zadanie 9

Niech A będzie dziedziną Dedekinda taką, że grupa $\operatorname{Cl}(A)$ jest trywialna. Pokaż, że A jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.

Wskazówka: można powołać się na zadanie XII.4.