Poniżej wzorcowe rozwiązanie zadania z kartkówki. Bardzo powolne i dokładne, żeby każdy mógł prześledzić rozumowanie. Na kolokwium czy egzaminie można pracować szybciej. Gdyby ktoś znalazł błąd, proszę o maila, punkty za aktywność czekają!

VII kartkówka — 4.12.2013

Zadanie 1

Macierz A zadana jest wzorem $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Oblicz macierz A^{20}.

Uwaga: wynikiem ma być macierz 2×2. *Dozwolone jest pozostawienie wyrażeń typu* $6\cdot 4^{21}$ *bez obliczania dokładnej wartości. Wszelkie obliczenia i rozważania należy dołączyć. Rozwiązanie zadania inną metodą niż na ćwiczeniach będzie poprawne, o ile będzie to efektywna metoda, tzn. da się równie łatwo policzyć np. setną potęgę.*

Rozwiązanie. *Wyrażenia zapisane na marginesie to komentarze dla czytelnika.*

Chcemy zdiagonalizować macierz A, czyli znaleźć jej bazę złożoną z wektorów własnych .*Nie wiemy, czy A jest diagonalizowalna, ale to nasza jedyna nadzieja.* Obliczamy wielomian charakterystyczny

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(-\lambda) - 5 = (\lambda-5)(\lambda+1).$$

Pierwiastkami tego wielomianu są $-1, 5$. *Pierwiastki te można oczywiście policzyć również ze wzoru na pierwiastki równania kwadratowego.* Mamy dwie wartości własnego macierzy 2×2, więc macierz ta jest diagonalizowalna.

Chcemy teraz obliczyć (*lub zgadnąć*) wektory własne. Wektor (x_1, x_2) jest wektorem własnym dla $\lambda = -1$ gdy

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix},$$

lub równoważnie (*warto przemyśleć dlaczego*)

$$\begin{bmatrix} 4-(-1) & 5 \\ 1 & 0-(-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0, \text{ czyli } \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Rozwiązaniem ogólnym tego układu jest $x_1 = -x_2$, więc baza przestrzeni własnej to np. $(-1, 1)$. *Równie dobrze moglibyśmy wziąć np.* $(1, -1)$.

Podobnie dla wartości własnej $\lambda = 5$ otrzymujemy układ równań

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 5 \\ 1 & 0-5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0, \text{ którego rozwiązaniem ogólnym jest } \ x_1 = 5x_2,$$

czyli wektor własny będący bazą przestrzeni własnej to np. $(5, 1)$.

Niech $\mathcal{A} = ((5,1), (-1,1))$. Chcemy obliczyć macierze przejścia $C = \mathrm{M}(\mathrm{id})^{st}_{\mathcal{A}}$ i $C^{-1} = \mathrm{M}(\mathrm{id})^{\mathcal{A}}_{st}$. *Tak, te macierze są odwrotne.* Macierz C możemy wypisać wprost znając bazę $\mathcal{A}$:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uwaga! Niektórzy mieli tendencję do zamieniania wierszy i kolumn. Teraz musimy obliczyć macierz C^{-1}. *Większość nie miała problemu z tym na kartkówce, więc opuszczam obliczenia.* Wynosi ona

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ -1/6 & 5/6 \end{bmatrix}, \text{ inaczej } \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Teraz wiemy, że

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = C^{-1} \cdot A \cdot C.$$

Jeżeli ktoś nie wie dlaczego, warto zajrzeć do wykładu. Wobec tego

$$C \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} C^{-1} = C(C^{-1}AC)C^{-1} = A.$$

Powyższych dywagacji na pewno nie potrzeba pisać na kolokwium. Ale warto wiedzieć, dlaczego wzory działają. Teraz już umiemy obliczyć

$$A^{20} = \left(C \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} C^{-1} \right)^{20} = C \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{20} C^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5^{20} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Wynikiem jest

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 5^{21}+1 & 5^{21}-5 \\ 5^{20}-1 & 5^{20}+5 \end{bmatrix}, \text{ inaczej } \begin{bmatrix} (5^{21}+1)/6 & (5^{21}-5)/6 \\ (5^{20}-1)/6 & (5^{20}+5)/6 \end{bmatrix}.$$

Jako zadanie domowe warto przetestować poniższe rozumowanie na zadaniu z drugiego rzędu:

Zadanie 3

Macierz B zadana jest wzorem $\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Oblicz macierz B^{20}.

Uwaga: wynikiem ma być macierz 2×2*. Dozwolone jest pozostawienie wyrażeń typu* $6\cdot 4^{21}$ *bez obliczania dokładnej wartości. Wszelkie obliczenia i rozważania należy dołączyć. Rozwiązanie zadania inną metodą niż na ćwiczeniach będzie poprawne, o ile będzie to efektywna metoda, tzn. da się równie łatwo policzyć np. setną potęgę.*