



[](#)
[Zadania PDF.](#)

Źródło zadań w texu.

```
% File: zad.tex % Created: Sat Nov 13 02:00 PM 2010 C % Last Change: Sat Nov 13
02:00 PM 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath}
textwidth 16cm textheight 25.5cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt
headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc}
usepackage{import} usepackage[pdftborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} %
----- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if
over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small %
THEOREMS ----- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section]
newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat}
newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość}
newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{}
newenvironment{proof}[1][Dowód. ]{noindenttextsc{#1}}{nolinebreak[4]hfill$\blacksquare$\par}
newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{noindenttextsc{#1}}{hfillpar}
newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}}{hfillpar} defdeg{^{\circ}}
defsource#1{\Źródło: #1} %subimport{../}{style} include{style} begin{document}
setlength{topmargin}{-1.2cm} section{ {normalsize W ciągu $n$ kólek są dwa mówiące o tym
samym, czyli$[-1cm] Dirichlet!} renewcommand{thethm}{} begin{thm}[Zasada szufladkowa
Dirichleta] Jeżeli $kn+1$ przedmiotów wkładamy do $n$ szufladek, to w przynajmniej jednej
szufladce będzie przynajmniej $k+1$ przedmiotów.end{thm} subsection{Prostsze}
begin{enumerate} item begin{problem} $200$ różnych punktów zostało wybranych
na okręgu tak, że kąt środkowy oparty na dowolnych dwóch z nich ma całkowitą ilość
stopni. Dowiedź, że wśród nich istnieją punkty antypodyczne (tzn. symetrycznie
względem środka okręgu). end{problem} item begin{problem} Pokaż, że
istnieją dwie różne potęgi $3^k$, których różnica jest podzielna przez $2010$.
end{problem} item begin{problem} Liczby $1,2,3,\dots,10$ zostały umieszczone
w pewnym porządku na okręgu. Udowodnij, że istnieją 3 kolejne liczby, których suma
```

jest nie mniejsza niż 17% . $\end{problem}$ $\item$ $\begin{problem}$ Dany jest zbiór 2011 punktów na płaszczyźnie. Z każdej trójki punktów da się wybrać dwa odległe od siebie o mniej niż 1% stańkometr. Udowodnij, że pewne 1006% punktów leży w pewnym kole o promieniu 1% stańkometra. $\end{problem}$

$\item$ $\begin{problem}$ Wykaż, że w dowolnym wielościanie istnieją dwie ściany o tej samej liczbie krawędzi. $\end{problem}$ $\end{enumerate}$ subsection{Średnie i trudniejsze} %Niektóre zadania są wzięte z książki Musztariego. %emph{Wśród poniższych zadań nie ma naprawdę trudnych, ale i naprawdę łatwych. %Osobom, które nie zetknęły się jeszcze z Dirciem sugeruję pomyśleć najpierw %nad zadaniami z [url{http://matma.ilo.pl/images/pros09_diri.pdf}](http://matma.ilo.pl/images/pros09_diri.pdf). Jeżeli %chcecie jeszcze więcej zadań polecam wpisać w wyszukiwarce [url{matma.ilo.pl}](http://matma.ilo.pl) %`Dirichlet".}

$\begin{enumerate}$ % $\item$ % $\begin{problem}$ % emph{Resztką teorii liczb -- fakt potrzebny do rozwiązania % zadania z poprzedniego kółka.} % Niech $a, b \in \mathbb{Z}$, niech liczba d będzie całkowita. % Udowodnij, że następujące warunki są równoważne: % $\begin{enumerate}$ % $\item$ $NWD(a, b) \mid d$. % $\item$ Istnieją liczby $x, y \in \mathbb{Z}$, takie, że $[ax + by = d]$ % $\end{enumerate}$ % emph{Wskazówki (niektóre podpunkty warto narysować na osi % liczbowej).} % Dla zwiezłości oznaczamy $(a, b) := \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$, czyli zbiór liczb całkowitych dających się % zapisać w postaci $ax + by$ dla pewnych x, y całkowitych. % Analogicznie oznaczam $(NWD(a, b)) := \{ NWD(a, b)x \mid x \in \mathbb{Z} \}$ % $\right\}$. % $\begin{enumerate}$ % $\item$ Wykaż, że $(b) \rightarrow (a)$, innymi słowy, że $d \mid (a, b)$ implikuje $NWD(a, b) \mid d$. % $\item$ emph{Przetrawianie definicji. Wszystkie poniższe % stwierdzenia są "udowodnialne" drogą % podstawiania definicji (a, b) .} % Uzasadnij, że % $\begin{enumerate}$ % $\item$ $0 \in (a, b)$. % $\item$ Jeżeli $t \in (a, b)$ i $s \in \mathbb{Z}$ to $st \in (a, b)$, innymi słowy $t \in (a, b)$ i $st \mid u$ implikuje $s \in (a, b)$. % $\item$ Jeżeli $t, u \in (a, b)$ to $t + u, t - u \in (a, b)$. % $\end{enumerate}$ % $\item$ Uzasadnij, że jeżeli $d \in (a, b)$ to również $a \bmod d, b \bmod d \in (a, b)$ % $\item$ Niech d_0 będzie najmniejszą liczbą dodatnią z (a, b) . % Zrozum, że skoro $a \bmod d_0 < d_0$ i $b \bmod d_0 < d_0$ to $a \bmod d_0 = 0$ i analogicznie $b \bmod d_0 = 0$, czyli $d_0 \mid a$ i $d_0 \mid b$, zatem $d_0 \mid NWD(a, b)$, z poprzedniego punktu ($d \mid (a, b)$) mamy $NWD(a, b) \mid d_0$, czyli $d_0 = NWD(a, b)$. % $\item$ emph{Dowód $(a) \rightarrow (b)$.} % Niech d będzie dowolną liczbą podzielną przez $NWD(a, b)$. Skorzystaj z poprzednich podpunktów aby dowieść, że $d \mid (a, b)$. % $\item$ emph{Bonus.} Zauważ, że teza mówi dokładnie, że zachodzi równość $(NWD(a, b)) = (a, b)$. % $\end{enumerate}$ % $\end{problem}$ $\item$ $\begin{problem}$ emph{Resztką teorii liczb -- fakt potrzebny do rozwiązania zadania z poprzedniego kółka.} Niech $a, b \in \mathbb{Z}$, niech liczba d będzie całkowita. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne: $\begin{enumerate}$ $\item$ $NWD(a, b) \mid d$. $\item$ Istnieją liczby $x, y \in \mathbb{Z}$, takie, że $[ax + by = d]$ $\end{enumerate}$ emph{Wskazówki: } $\begin{enumerate}$ $\item$ Wykaż, że $(b) \rightarrow (a)$. $\item$ emph{ $(a) \rightarrow (b)$.} Załóż, że $NWD(a, b) = 1$. Z twierdzenia chińskiego o resztach wynika, że istnieją: [A: A

equiv 0 mod a, A equiv 1 mod b,] [B: B equiv 1 mod a,
 B equiv 0 mod b.] Oczywiście $A + B \equiv 1 \pmod{a}$ i $A + B \equiv 1 \pmod{b}$.
 1 mod b\$. Uzasadnij, że $A + B \equiv 1 \pmod{ab}$. Zauważ, że stąd
 wynika przedstawienie $1 = ax + by$ dla pewnych x, y in $\mathbb{Z}$, a przez
 domnożenie --- przedstawienie dowolnej liczby naturalnej w tej postaci.
 item Udowodnij twierdzenie w ogólnej postaci, bez założenia $\text{NWD}(a,b) = 1$.
 emph{Wskazówka: Podziel przez $\text{NWD}(a,b)$.} end{enumerate}
 end{problem} item begin{problem} W ILO powołano komitety wyborcze. Każdy
 komitet skupia ponad połowę uczniów. Udowodnić, że istnieje uczeń, który należy do
 ponad połowy komitetów. end{problem} item begin{problem}
 Każdy punkt płaszczyzny malujemy na sebowo lub hubowo. Udowodnić, że istnieje
 prostokąt o osiach równoległych do układu współrzędnych, którego wszystkie
 wierzchołki są tego samego koloru. end{problem} item begin{problem}
 Yogi zjada co najmniej jeden piknik dziennie. Jeżeli przez ostatni miesiąc (30
 dni) zjadł on 45 pikników udowodnij, że od pewnego dnia A do dnia B zjadł dokładnie
 14 pikników. end{problem} item begin{problem} Oznaczam $\{x\}$
 część ułamkową liczby x , tzn. taką liczbę r in $[0,1)$, że $x - r$ jest całkowita.
 Np. $\{3.5\} = 0.5$, $\{-1.2\} = 0.8$. Niech α będzie liczbą niewymierną.
 Udowodnić, że w dowolnym przedziale $(a,b) \subseteq [0,1)$, ($a < b$) istnieje
 nieskończenie wiele liczb postaci $\{\alpha^n\}$ dla n in $\mathbb{N}$.
 emph{Wskazówki:} begin{enumerate} item Weź liczby $\{\alpha\}, \{2\alpha\},$
 $\{3\alpha\}, \dots, \{n\alpha\}, \dots, \{(n+1)\alpha\}$, udowodnij, że dwie różne z
 nich leżą w odległości nie większej niż $1/n$, stwierz że wobec tego istnieje
 liczba postaci $\{\alpha^n\}$ w przedziale $(0, \frac{1}{n})$ lub w przedziale
 $(1 - \frac{1}{n}, 1)$. Udowodnij, że jeżeli istnieje liczba w przedziale $(1 - \frac{1}{n},$
 $1)$ to i $w \in (0, \frac{1}{n})$, zatem zawsze istnieje liczba w $(0,$
 $\frac{1}{n})$. item Obierz dowolne $0 < \epsilon < 1$, k in $\mathbb{N}$ i udowodnij, że w
 przedziale (a,b) leży co najmniej k różnych liczb postaci $\{\alpha^n\}$,
 biorąc wielokrotności liczby otrzymanej powyżej. end{enumerate}
 end{problem} item * begin{problem} Uzasadnij, że dla dowolnej liczby
 A istnieje takie n , że 2^n rozpoczyna się od cyfr z liczby A np. dla $A =$
 13 mamy $2^{17} = 131072$, dla $A = 1811$ mamy $2^{1901} =$
 $\underbrace{1811430839172}_{573 \text{ cyfr}}$, jak widać te liczby nie
 muszą być zbyt małe :P emph{Wskazówka: rozważ $n \log_{10} 2 = \log_{10} 2^n$
 i $\log_{10} A$, gdzie $\log_{10} x$ to taka liczba rzeczywista, że $10^{\log_{10} x} =$
 x (żadnych strasznych własności logarytmów nie potrzeba znać).}
 end{problem} end{enumerate} end{document}