Świąteczne zadanka - rozwiązania

MAGDALENA SZARKOWSKA, MARIA BANEL

ZADANIE 1

Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} x+y+z=-12 \\ x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz \end{cases}$

Rozwiązanie:

Po przemnożeniu drugiego równania przez 2 i przeniesieniu wszystkiego na lewą stronę otrzymujemy:
$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz=0$, czyli: $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$
Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny, więc, aby suma kwadratów trzech liczb rzeczywistych była równa 0, każda z tych liczb musi być równa 0:
$x-y=0,\ \ y-z=0,\ \ z-x=0\ \ =>\ \ x=y=z$
Podstawiając tę zależność do pierwszego równania otrzymujemy wynik:
$x+x+x=-12 => x=y=z=-4$
Na koniec bezpośrednio sprawdzamy, że trójka liczb $(x,y,z)=(-4,-4,-4)$ spełnia układ równań z zadania.

ZADANIE 2

Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takie, że:

$$f(x+y)=f(2x)+f(3y)$$

Rozwiązanie:

Możemy podstawić $y=x$. Wówczas otrzymamy równość:
$f(2x)=f(2x)+f(3x)$
$f(3x)=0$
Rozwiązaniem jest zatem funkcja: $f(x)=0$.

ZADANIE 3

Niech $n\geq 1$ będzie liczbą naturalną, zaś $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ liczbami całkowitymi, których suma dzieli się przez 10. Udowodnić, że liczba ${x_1}^5+{x_2}^5+\cdots+{x_n}^5$ jest również podzielna przez 10.

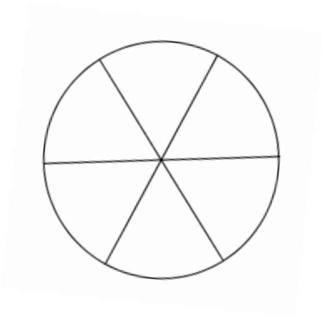
Rozwiązanie:

Z Małego Twierdzenia Fermata:
${x_i}^5\equiv x_i\ mod\ 5\ \ =>\ \ {x_i}^5-x_i\equiv 0\ mod\ 5$
Zatem:
$({x_1}^5-x_1)+({x_2}^5-x_2)+\cdots+({x_n}^5-x_n)\equiv 0\ mod\ 5$
$({x_1}^5+{x_2}^5+\cdots+{x_n}^5)-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\equiv 0 mod\ 5$
Wynika z tego, że skoro liczba ${x_1}^5+{x_2}^5+\cdots+{x_n}^5$ jest podzielna przez 5, to także liczba $x_1+x_2+\cdots+x_n$ jest podzielna przez 5.
Parzystość liczby nie zmienia się przy podnoszeniu do potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim, więc liczba $x_1+x_2+\cdots+x_n$ jest podzielna przez 2, a co za tym idzie, jest też podzielna przez 10.

ZADANIE 4

W kole o promieniu 1 wybrano siedem punktów. Wykaż, że istnieje wśród nich co najmniej jedna para punktów, których odległość jest nie większa od 1.

Rozwiązanie:



Podzielmy koło na 6 przystających części tak, jak pokazano na rysunku. Skoro jest 6 pól i 7 punktów, to z Zasady Szufladkowej Dirichleta wynika, że w którymś polu są przynajmniej 2 punkty. Każde pole jest wycinkiem kołowym o promieniu 1, zatem odległość dwóch punktów znajdujących się w tym samym polu będzie nie większa niż 1.

ZADANIE 5
Czy $10^{49} + 5^3$ dzieli się przez 7? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:

Korzystając z Małego Twierdzenia Fermata:
$10^7 \equiv 10\, mod\, 7$
$(10^7)^7 \equiv 10^7 \equiv 10\, mod\, 7$
$5 \equiv -2\, mod\, 7$
$5^3 \equiv -8 \equiv -1\, mod\, 7$
$10^{49} + 5^3 \equiv 10 - 1 \equiv 9 \equiv 2\, mod\, 7$
Liczba $10^{49} + 5^3$ nie dzieli się przez 7.

ZADANIE 6
Ania ma dużo zadań z matematyki do rozwiązania. Postanowiła podzielić je po równo na pewną ilość dni. Jeśli podzieli je na 3 dni, to czwartego dnia pozostaną dwa zadania do rozwiązania. Jeśli na 5 dni, to szóstego dnia będzie musiała rozwiązać 3 zadania, a jeśli na 7, to na ósmy dzień zostaną 2 zadania. Ile zadań musi rozwiązać Ania?

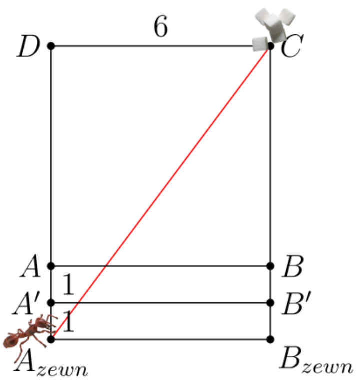
Rozwiązanie:

x-liczba zadań, które musi rozwiązać Ania
$$\begin{cases} x \equiv 2\ mod\ 3 \\ x \equiv 3\ mod\ 5 \\ x \equiv 2\ mod\ 7 \end{cases}$$
$x \equiv 2\ mod\ 3 => x = 3a + 2, a \in N$
$3a + 2 \equiv 3\ mod\ 5 => 3a \equiv 1\ mod\ 5 => a \equiv 2\ mod\ 5$
$a = 5b + 2, b \in N$
$x = 3 \cdot (5b + 2) + 2 = 15b + 8$
$15b + 8 \equiv 2\ mod\ 7 => 15b \equiv 1\ mod\ 7 => b \equiv 1\ mod\ 7$
$b = 7c + 1, c \in N$
$x = 15 \cdot (7c + 1) + 8 = 105c + 23$
Zadanie spełnia każda liczba postaci $105c + 23$ dla dowolnego $c \in N$ (najmniejsza taka liczba to 23).

ZADANIE 7
Otwarte z góry pudełko ma kształt prostopadłościanu, którego dolna podstawa $ABCD$ jest kwadratem o boku długości 6, zaś wysokość pudełka jest równa 1. W wierzchołku A (ale na zewnątrz pudełka) znajduje się mrówka. W wierzchołku C (wewnątrz pudełka) znajduje się kryształek cukru. Wyznacz długość najkrótszej drogi, jaką musi pokonać mrówka do kryształka cukru?

Rozwiązanie:

Niech A', B', C', D' będą pozostałymi wierzchołkami pudełka. Mrówka w swej wędrówce po cukier wspina się na ścianę pudełka, schodzi po niej, po czym po podstawie przechodzi do cukru. Rozważmy siatkę, na której początkowa pozycja mrówki jest oznaczona A_{zewn}. Najkrótszą drogą łączącą mrówkę z cukrem jest tutaj odcinek łączący punkty A_{zewn} i C, a jego długość wynosi $\sqrt{6^2 + (6+1+1)^2} = 10$.



(Zadanie wraz z rozwiązaniem pochodzi ze strony internetowej Konkursu Matematycznego Politechniki Białostockiej.)