A może tak spróbować sinusów?

kółko I LO Białystok
23 października

1.1 Początek i koniec trygonometrii

Twierdzenie sinusów jest nakładką na geometrię klasyczną (bo dowód jest prosty). Generalnie ***nie*** *należy go używać w rozwiązaniach, bo* $\sin 0 = 0$*, więc nie dla wszystkich kątów ma ono sens!*

Twierdzenie 1 (Twierdzenie sinusów)**.** *Jeżeli* ABC *jest* ***trójkątem****, a* R *oznacza promień okręgu opisanego na nim to*

$$\frac{AB}{\sin \sphericalangle BCA} = \frac{BC}{\sin \sphericalangle CAB} = \frac{CA}{\sin \sphericalangle CBA} = 2R.$$

Szkic dowodu. Niech AA' będzie średnicą okręgu opisanego na $\triangle ABC$. Wtedy kąt $\sphericalangle ACA'$ jest prosty więc z definicji sinusa dla trójkąta prostokątnego $\triangle AAC'$ mamy $2 \cdot R \cdot \sin \sphericalangle CA'A = AC$. Co więcej $\sphericalangle CA'A = \sphericalangle CBA$ lub $\sphericalangle CA'A = 180^\circ - \sphericalangle CBA$, w obu przypadkach $\sin \sphericalangle CA'A = \sin \sphericalangle CBA$. To dowodzi, że ostatni ułamek jest równy $2R$, z dokładnością do oznaczeń udowadniamy to identycznie dla pozostałych. □

Zadanie 1 (twierdzenie o dwusiecznej)
Dwusieczna kąta $\sphericalangle BCA$ w trójkącie ABC przecina bok AB w punkcie D. Udowodnij, że

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

Zadanie 2
Uzasadnij, że pole trójkąta $\triangle ABC$ wyraża się wzorem

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \sphericalangle BAC.$$

Udowodnij ponownie twierdzenie sinusów (bez części $= 2R$) korzystając z powyższego.

Zadanie 3
Udowodnij, że pole czworokąta o przekątnych długości k i l, przecinających się pod kątem α, jest równe

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot l \cdot \sin \alpha.$$

Które z czworokątów o danych długościach przekątnych mają największe możliwe pole?

1.2 Dirichleta ciąg dalszy

Zadanie 4
Wykazać, że wśród $10^{10} + 1$ liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2 \cdot 10^{10}\}$ są dwie liczby względnie pierwsze.

Wykazać, że istnieje zbiór 10^{10} liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2 \cdot 10^{10}\}$ w którym każde dwie liczby mają wspólny dzielnik większy od 1.

Zadanie 5
Wykaż, że jeśli dziesięć liczb całkowitych ma sumę 101, to muszą wśród nich być trzy, których suma wynosi co najmniej 31.

Zadanie 6
Niech A będzie podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, 150\}$ złożonym z 25 liczb. Wykaż, że istnieją dwie różne pary elementów zbioru A mające równe sumy.

Zadanie 7
Niech A będzie dziesięcioelementowym podzbiorem zbioru $\{3, 6, 9, \ldots, 150\}$. Wykaż, że A zawiera dwa różne czteroelementowe podzbiory, mające równe sumy elementów.

Zadanie 8 $\star$
Dany jest zbiór Ψ złożony z 24 liczb całkowitych dodatnich nie większych niż 100. Uzasadnij, że w zbiorze liczb postaci $a - b$ gdzie $a, b \in \Psi$ są różnymi elementami Ψ są co najmniej cztery różne liczby.

Zadanie 9 $\star$
Uzasadnij, że dla każdego n całkowitego dodatniego istnieje liczba Fibonacciego podzielna przez n.

Uwaga: liczba Fibonacciego to element ciągu danego wzorem $F_1 = 1, F_2 = 1$ *oraz zależnością* $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ *dla* $n \geqslant 1$*. Wskazówka: nie wystarczy wziąć* n *elementów ciągu.*