II kółko – Czy mamy dość teorii liczb?

27.10.09

Teoria

1. Małe twierdzenie Fermata:

   Twierdzenie 0.1 (Małe twierdzenie Fermata) *Dla każdej liczby pierwszej p i liczby całkowitej a zachodzi*
   $$p|a^p - a$$

2. **Definicja 0.2** *Niech a, n będą liczbami naturalnymi względnie pierwszymi.* Rzędem *liczby a modulo n nazywamy najmniejsze $k \in \mathbb{Z}_+$, takie, że*
   $$a^k \equiv 1 \mod n$$
   Rząd ten oznaczamy przez $\operatorname{ord}(a, n)$ *lub, gdy n jest znane,* $\operatorname{ord}(a)$.

3. **Twierdzenie 0.3 (Lemat o rzędzie)** *Jeżeli a, k', n są takie, że*
   $$a^{k'} \equiv 1 \mod n$$
   to $\operatorname{ord}(a, n)|k'$.

4. **Wniosek 0.4** *Jeżeli p jest liczbą pierwszą, zaś a jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p, to*
   $$\operatorname{ord}(a, p)|p - 1$$

Zadania

1. Udowodnić, że dla liczby pierwszej p istnieje takie n naturalne, że
   $$p|2^n - n$$
   Źródło: Staszic

2. Udowodnić, że dla liczby pierwszej p istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że
   $$p|2^n - n$$
   Źródło: Staszic

3. Rozstrzygnąć, dla jakich $k \in \mathbb{N}$ istnieje liczba naturalna n, będąca kwadratem liczby naturalnej i zaczynająca się w zapisie dziesiętnym k jedynkami.
   Źródło: Mathlinks

4. * Udowodnić, że równanie
   $$x^2 + y^2 + z^2 = (x - y)(y - z)(z - x)$$
   ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z.
   Źródło: Mathlinks

5. * Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że
   $$n^2|3^n + 1$$
   Źródło: Staszic

Zadania „lekcyjne”

1. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi
$$2^{n+1}|3^{2^n}-1$$
2. Rozstrzygnąć, czy poniższe twierdzenie jest prawdziwe:
Jeżeli $p>2$ jest liczbą pierwszą, zaś a jest taką liczbą całkowitą dodatnią, że $p|a+1$, to
$$p^{n+1}|a^{p^n}+1$$
dla wszystkich liczb $n \in \mathbb{Z}_+$.