Przegląd PTMów

kółko I LO Białystok
26 lutego 2013

Zadania przeznaczone na półtora kółka, nie wszystko na dziś ;).

Wszystkie zadania pochodzą z Podlaskiego Konkursu Matematycznego, aka Konkursu Matematycznego PB.

Zadanie 1
W przestrzeni trójwymiarowej punkt M jest środkiem każdego z odcinków AD, BE, CF. Uzasadnić, że trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ są przystające.

Zadanie 2
Wykazać, że jeśli liczby a, b są nieujemne to

$$(a+b)(a^4+b^4) \geqslant (a^2+b^2)(a^3+b^3).$$

Zadanie 3
Która z liczb: $6^{7^{8^9}}, 9^{8^{7^6}}$ jest większa? Odpowiedź uzasadnić.

Uwaga: potęgi są bez nawiasów: $2^{2^3} = 2^8 \neq 2^6 = \left(2^2\right)^3$, *podobnie* $2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16}$. *Rozwiązanie tego zadania (jak i pozostałych zadań) nie może korzystać z obliczeń na komputerze, kalkulatorze itp.*

Zadanie 4
Ile maksymalnie liczb pierwszych może wystąpić wśród dziesięciu kolejnych liczb całkowitych?

Zadanie 5
Wyznaczyć wszystkie przedstawienia liczby 2012 w postaci sumy kolejnych liczb całkowitych.

Zadanie 6
Czy na płaszczyźnie można wybrać 7 punktów tak, aby wśród dowolnych trzech spośród nich istniały dwa punkty odległe od siebie o 1?

Zadanie 7
Dla dowolnych liczb x, y z przedziału $(0, 1)$ udowodnić, że $xy - x - y < (xy)^2 - x^2 - y^2$.

Zadanie 8
Pole kwadratu $ABCD$ wynosi 5. Punkty K, L, M, N są środkami boków AB, BC, CD, DA odpowiednio. Obliczyć, ile wynosi pole kwadratu $XYZT$ ograniczonego prostymi CK, DL, AM i BN.