Analiza utworu matematycznego na podstawie wybranych fragmentów "konkursu PTM" i dzieł powiązanych

kółko I LO Białystok

23 kwietnia 2013

To są ciekawe zadania, bardzo zachęcam do prób rozwiązania oraz (potem!) przeczytania rozwiązań, najlepiej przed PTMem :)

Zadanie 1 koresp, 2013
Czy więcej dzielników dodatnich liczby 2013^{2013} kończy się jedynką, czy trójką? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2 koresp, 2013
Liczby rzeczywiste a, b, c, x, y, z spełniają równania $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Uzasadnij, że

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z \leqslant 1.$$

Zadanie 3 koresp, 2013
Nora krecika składa się z 25 kopczyków połączonych tunelami. Z każdego z kopczyków wychodzą tunele prowadzące do dwunastu innych kopczyków (tunele nie przecinają się). Uzasadnij, że krecik może przejść pomiędzy dowolnymi dwoma kopczykami nie wychodząc na powierzchnię.

Zadanie 4 kl. I, 2012
Współczynniki rzeczywiste a, b, c trójmianu $ax^2 + bx + c$ spełniają zależność $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$. Udowodnić, że jeśli $a \neq 0$, to równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste.

Zadanie 5 kl. I, 2011
Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite x, y takie, że $4x + (x + 1)^2 = y^2$.

Zadanie 6 kl. I, 2013
Dany jest okrąg $\mathbf{o}$ z zaznaczonym środkiem S. Udowodnić, że za pomocą cyrkla i linijki można koło ograniczone okręgiem $\mathbf{o}$ podzielić na siedem części o równych polach.

Zadanie 7 kl. I, 2011
W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wpisanym w okrąg zachodzą równości: $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Udowodnić, że przekątne AD, BE, CF tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 8 kl. I, 2012
Udowodnić, że z nieskończonego ciągu liczb naturalnych

$$1, 11, 111, 1111, 11111, \ldots$$

którego n-ty wyraz jest równy $\underbrace{11\ldots1}_{n}$, można wybrać nieskończenie wiele różnych wyrazów, z których każde dwa są liczbami względnie pierwszymi.

Uwaga. *Liczby całkowite a i b nazywamy względnie pierwszymi, jeżeli jedyną liczbą naturalną dzielącą a i b jest* 1.