Internetowe Koło Matematyczne

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów www.omg.edu.pl

Zestaw 2

1. Dana jest taka liczba rzeczywista, której rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone i składa się wyłącznie z cyfr 1, 2 i 3. Wykaż, że jeżeli w tym rozwinięciu jest co najwyżej 2010 jedynek i co najwyżej 2010 dwójek, to dana liczba jest wymierna.

2. W trójkąt ostrokątny ABC o polu S wpisano kwadrat $KLMN$ o polu P w taki sposób, że punkty K i L leżą na boku AB, a punkty M i N leżą odpowiednio na bokach BC i CA. Oblicz sumę długości boku AB i wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C.

3. Rozstrzygnij, czy istnieją parami różne liczby pierwsze p, q, r, dla których liczba

$$\frac{(p+q)(q+r)(r+p)}{pqr}$$

jest liczbą całkowitą.

4. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$, w którym odcinek AC_1 jest jego główną przekątną. Wykaż, że jeżeli punkt P, różny od punktów A i C_1, leży na powierzchni tego sześcianu, to trójkąt APC_1 jest prostokątny lub rozwartokątny.

5. Na okręgu napisano n liczb rzeczywistych w taki sposób, że każda z tych liczb jest równa wartości bezwzględnej różnicy dwóch liczb stojących bezpośrednio za nią (patrząc zgodnie z ruchem wskazówek zegara).

a) Znajdź te liczby, jeśli $n=2010$ a ich suma jest równa 1340.

b) Znajdź sumę tych liczb, jeśli $n=1\,000$.

6. Dany jest taki wypukły pięciokąt $ABCDE$, że czworokąt $ABDE$ jest prostokątem. Wykaż, że $[ABCDE]<2\cdot[ACE]$.

Uwaga. Symbolem $[\mathcal{F}]$ oznaczamy pole figury $\mathcal{F}$.

7. Rozstrzygnij, ile jest wszystkich par (x,y) liczb naturalnych sześciocyfrowych, spełniających następujące warunki:

1° wszystkie cyfry liczb x i y są różne od zera,

2° liczba y powstaje przez przestawienie cyfr liczby x,

3° $x+y=1\,000\,000$.

Odpowiedź uzasadnij.