Österreichische Mathematik Olympiade

Zwei Dinge sind unendlich, das Universum und die menschliche Dummheit, aber beim Universum bin ich mir nicht ganz sicher. *Albert Einstein*

Łatwiejsze

1. Dla jak wielu liczb całkowitych a takich, że $|a| \leq 2005$ układ równań

$$x^2 = y + a \tag{1}$$
$$y^2 = x + a \tag{2}$$

ma rozwiązania w liczbach całkowitych (x, y)?
Rozwiązanie:

(a) Załóżmy, że liczby x, y, a spełniają dany układ równań. Wówczas odejmując drugie równanie od pierwszego otrzymujemy

$$x^2 - y^2 = y - x \text{ czyli } (x - y)(x + y + 1) = 0$$

A więc $x = y$ **albo** $x + y = -1$, przy czym obie te sytuacje nie mogą zajść jednocześnie (gdyby zachodziły to $x = y = -1/2$).

(b) Rozważmy przypadek $x = y$. W tym przypadku liczby x, y, a spełniają układ równań

$$x^2 = x + a \tag{3}$$
$$x^2 = x + a \tag{4}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają równanie $x^2 = x + a$ albo równanie:

$$x(x - 1) = x^2 - x = a$$

Widać że dla danego x istnieje a spełniające warunki zadania wtedy i tylko wtedy gdy

$$x(x - 1) \leq 2005$$

Można na upartego szacować to wyrażenie rozwiązując równanie kwadratowe, albo zgadywać dla jakich x całkowitych to zachodzi (i potem szacować), tak czy inaczej nierówność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \{-44, -43, \ldots, 44, 45\}$.

(c) Chcemy teraz wyliczyć wartości $a = x(x - 1)$ dla x z powyższego przedziału.
Niech $f(x) = x(x - 1)$. Zauważmy, że wartościami funkcji f dla liczb $\{-44, -43, \ldots, 45\}$ są

$$-44 \cdot -45, -43 \cdot -44, \ldots, 0 \cdot -1, 1 \cdot 0, \ldots, 45 \cdot 44.$$

Bardziej formalnie:

$$f(-x + 1) = (-x + 1)(-x) = x^2 - x = x(x - 1) = f(x)$$

a więc $f(0) = f(1), f(-1) = f(2), \ldots$ oraz dla $x \geq 1$ jest

$$f(x + 1) = (x + 1)x = x^2 + x > x^2 - x + 1 = f(x) + 1. \tag{5}$$

Otrzymujemy 45 różnych możliwych wartości a:

$$f(1) = 1 \cdot 0 = 0, f(2) = 2 \cdot 1 = 2, \ldots, f(45) = 45 \cdot 44$$

(d) Jeżeli zachodzi $x + y = -1$ to liczby x, y, a spełniają układ równań

$$x^2 = -1 - x + a \tag{6}$$
$$(1 + x)^2 = x + a \tag{7}$$

wtedy i tylko wtedy gdy spełniają równanie

$$x(x + 1) = x^2 + x = a - 1$$

jest ono podobne do równania

$$x(x - 1) = x^2 - x = a$$

z poprzedniego przypadku. Obliczamy jego rozwiązania analogicznie, otrzymując:

$$0 + 1 = 1, 2 + 1 = 3, \ldots, 45 \cdot 44 + 1$$

Pozostaje uzasadnić, że powyższe wartości a i wartości az poprzedniego przypadku:

$$0, 2, \ldots, 45 \cdot 44$$

są różne. Wynika to z 5 po pewnym zastanowieniu:

$$0 < 0 + 1 = 1 < 2 < 2 + 1 = 3 < \ldots 45 \cdot 44 < 45 \cdot 44 + 1$$

(e) Ostatecznie może być 90 różnych wartości a. Uff...

2. Mamy dwa przystające trójkąty równoboczne. Jeden z nich jest ustawiony w pewnym układzie współrzędnych “wierzchołkiem w dół”, a drugi “wierzchołkiem w górę”. Przecięcie tych trójkątów jest sześciokątem. Udowodnić, że 3 odcinki łączące przeciwległe wierzchołki tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.
Rozwiązanie:
Wierzchołki trójkątów oznaczamy alfabetycznie, przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.
Ustalmy, że trójkąt zwrócony “wierzchołkiem w górę” to MNO i M jest “zwrócony w górę”. Drugi trójkąt oznaczmy PQR przy czym P jest “zwrócony w dół”.
Napis $X = X_1X_2 \cap X_3X_4$ oznacza, że X jest punktem przecięcia prostych X_1X_2, X_3X_4. Niech:

$$A := MN \cap RQ,\ B := MN \cap RP,\ C := NO \cap PR$$

$$D := NO \cap PQ,\ E := MO \cap PQ,\ F := MO \cap RQ$$

Punkty A, B, C, D, E, F są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta z zadania. Zauważmy, że

(a) $MN||PQ$ i tym samym $AB||DE$,

(b) Trójkąty ABR i DEO mają wszystkie kąty równe $60°$, a więc są one równoboczne, w szczególności są podobne.

(c) Długość h_R wysokości opuszczonej z wierzchołka R w trójkącie PQR jest równa długości h'_R wysokości opuszczonej z R w ABR dodać odległość między prostymi MN i PQ.
Analogicznie:
Długość h_O wysokości opuszczonej z wierzchołka O w trójkącie MNO jest równa długości h'_O wysokości opuszczonej z O w DEO dodać odległość między prostymi MN i PQ.

(d) Ponieważ MNO i PQR są przystające, to $h_O = h_R$, a więc $h'_O = h'_R$, czyli trójkąty ABR i DEO są przystające

$$|AB| = |DE|$$

(e) Odcinki AB i DE są równej długości i równoległe, a więc $ABDE$ jest równoległobokiem, czyli przekątne AD i BE przecinają się w połowie. Analogiczna obserwacja pokazuje, że przekątne AD i CF przecinają się w połowie, czyli wszystkie trzy przekątne przecinają się w jednym punkcie (środku odcinka AD).

3. Ustalić, dla jakich trójek liczb całkowitych dodatnich (a,b,c) liczba $a+b+c$ jest najmniejszą wspólną wielokrotnością tych trzech liczb.

Rozwiązanie 1:

Na początek zauważmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}_+$ trójka postaci $(k, 2k, 3k)$ spełnia warunki zadania.

(a) Ponieważ cała sytuacja z zadania jest symetryczna to możemy założyć

$$a \le b \le c$$

Będę oznaczać najmniejszą wspólną wielokrotność a, b, c przez $NWW(a,b,c)$. A więc warunkiem z zadania jest

$$NWW(a,b,c) = a+b+c$$

(b) Chcę teraz udowodnić, że $NWW(a,b,c) < 3c$.
Mamy nierówność $a \le b \le c$, a więc $NWW(a,b,c) = a+b+c \le 3c$.
Równość $NWW(a,b,c) = 3c$ oznacza że $a = c$ i $b = c$, czyli $NWW(a,b,c) = c < 3c$. Sprzeczność. Tak więc $NWW(a,b,c) < 3c$. Zachodzą nierówności:

$$c < a+b+c = NWW(a,b,c) < 3c$$

Ale wiemy, że $c | NWW(a,b,c)$. Z tego wszystkiego wynika

$$a+b+c = NWW(a,b,c) = 2c$$

$$c = a+b \text{ i } NWW(a,b,c) = NWW(a,b,a+b) = 2a+2b$$

(c) Jeżeli $a = b$ to $NWW(a,b,a+b) = NWW(a,a,2a) = 2a \neq 4a$. Sprzeczność. A więc $a < b$ i tym samym $NWW(a,b,a+b) = 2a+2b < 4b$. Zachodzi także $NWW(a,b,a+b) > 2b$ oraz $b | NWW(a,b,a+b)$. Z tego wszystkiego wynika

$$2a+2b = NWW(a,b,a+b) = 3b$$

$$b = 2a, \ c = 3a$$

A więc liczby a, b, c są postaci $(a, 2a, 3a)$ dla pewnego $a \in \mathbb{N}_+$. To kończy rozwiązanie.

Rozwiązanie 2:

Na początek zauważmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}_+$ trójka postaci $(k, 2k, 3k)$ spełnia warunki zadania.

(a) Rozważmy na początek przypadek gdy liczby a, b, c są parami względnie pierwsze (czyli $NWD(a,b) = NWD(b,c) = NWD(c,a) = 1$).
Zachodzi $a+b+c = NWW(a,b,c) = abc$. Możemy założyć, że $a \le b \le c$. Jeżeli $a > 1$ to $abc \ge 2bc \ge 4c > c+c+c > a+b+c$. A więc $a = 1$.
Jeżeli $b = 1$ to $NWW(1,b,c) = NWD(1,1,c) \neq 1+1+c$. Jeżeli, z drugiej strony, $b > 2$ to

$$abc = bc \ge 3c > c+b+1$$

Musi zajść $b = 2$ i tym samym $3+c = 2c$, $c = 3$.
W tym przypadku $(a,b,c) = (1,2,3)$.

(b) Rozważmy dowolną trójkę liczb a, b, c spełniających warunki zadania. Trójka

$$a' = a/NWD(a,b,c), b' = b/NWD(a,b,c), c' = c/NWD(a,b,c)$$

także spełnia warunki zadania. Ponadto $NWD(a',b',c') = 1$.
Zachodzi $NWD(a',b') | NWW(a',b',c') = a'+b'+c'$, czyli $NWD(a',b') | c'$, a więc $NWD(a',b') \le NWD(a',b',c') = 1$. Stąd wynika

$$NWD(a',b') = 1.$$

Analogicznie

$$NWD(a',c') = 1, \ NWD(b',c') = 1$$

Liczby (a',b',c') są parami względnie pierwsze, czyli $(a',b',c') = (1,2,3)$. Tym samym $(a,b,c) = (k, 2k, 3k)$ gdzie $k = NWD(a,b,c)$. Uwaga: Dla dowolnych liczb a, b, c nie ma implikacji $NWD(a,b,c) \Rightarrow NWD(a,b)$ np. dla $(a,b,c) = (2,2,3)$.

Odpowiedź: Trójka (a, b, c) jest równa pewnej permutacji $(k, 2k, 3k)$, dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

4. Mamy daną funkcję $f(x) = [x^2] + \{x\}$, gdzie $[a]$ oznacza największą liczbę całkowitą niewiększą niż a, zaś $\{a\} = a - [a]$.
Wykaż, że istnieje nieskończony ciąg arytmetyczny liczb wymiernych, takich, że jeżeli liczba a należy do tego ciągu,to nie istnieje b takie, że $f(b) = a$.
Uwaga: Założenia tezy zostały osłabione w stosunku do wersji z olimpiady.
Rozwiązanie:

(a) Zauważmy, że jeżeli $f(b)$ jest całkowite to i liczba b musi być całkowita. Jeżeli natomiast liczba b jest całkowita, to $f(b) = b^2$. A zatem liczba całkowita która jest wartością f musi być kwadratem liczby całkowitej.

(b) Rozważmy ciąg $(3k + 2)$ gdzie $k \in \mathbb{N}_+$. Jest to nieskończony ciąg arytmetyczny liczb całkowitych. Żaden wyraz tego ciągu nie jest kwadratem liczby całkowitej, gdyż kwadraty liczb całkowitych nie dają reszty 2 przy dzieleniu przez 3. Tak więc żaden wyraz tego ciągu nie jest wartością funkcji f.

Trudniejsze

1. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele takich wielokrotności 2005, w których zapisie dziesiętnych cyfry $0, 1, 2, 3 \ldots, 9$ występują wszystkie tyle samo razy (bez liczenia wiodących zer).
Rozwiązanie:

$$2005 = 5 \cdot 401$$

Rozważmy liczby:

$$9876543210, 98765432109876543210, \ldots, \underbrace{9876543210 \ldots 9876543210}_{402}$$

Wszystkie te liczby są podzielne przez 5. Ponadto mamy 402 liczby, a więc której dwie z nich dają taką samą resztę z dzielenia przez 401:

$$401 | \underbrace{9876543210 \ldots 9876543210}_{k} - \underbrace{9876543210 \ldots 9876543210}_{l} = 10^{10l} \cdot \underbrace{9876543210 \ldots 9876543210}_{k-l}$$

gdzie $l < k$. Ponieważ 401 jest względnie pierwsze z 10 to

$$401 | \underbrace{9876543210 \ldots 9876543210}_{k-l}$$

a więc

$$2005 | \underbrace{9876543210 \ldots 9876543210}_{k-l}$$

2. Liczby a, b, c, d są rzeczywiste dodatnie. Udowodnić, że

$$\frac{a+b+c+d}{abcd} \leq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności pomiędzy średnią harmoniczną a geometryczną otrzymujemy

$$3/(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}) \leq abc$$

czyli

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq \frac{3}{abc}$$

Sumując analogiczne nierówności dla (a, b, d), (a, c, d), (b, c, d) otrzymujemy tezę.

3. Trójkąt ABC jest ostrokątny. Rysujemy dwa okręgi k_1 i k_2, których średnicami są odcinki AC i BC odpowiednio. Niech AD i BE będą wysokościami w ABC.
Niech punkty $L \neq N$ będą punktami przecięcia BE z k_1, przy czym L leży bliżej B niż N oraz punkty $K \neq M$ będą punktami przecięcia AD i k_2, przy czym K leży bliżej A niż M.
Udowodnić, że na czworokącie $KLMN$ da się opisać okrąg.
Rozwiązanie:

(a) Niech F będzie rzutem C na AB. Niech H będzie przecięciem wysokości w $\triangle ABC$.

(b) Zastosujemy twierdzenie:

Twierdzenie 1.1 *Jeżeli $ABCD$ jest czworokątem wypukłym, jego przekątne przecinają się w M oraz zachodzi $|AM||CM| = |BM||DM|$ to na czworokącie $ABCD$ da się opisać okrąg.*

(patrz kółko o potędze punktu z 2008 roku)

(c) Zauważmy, że F leży na k_1 i na k_2, gdyż $\angle CFB = \angle CFA = 90°$.
Z twierdzenia o potędze punktu dla punktu H i okręgu k_1 wiemy, że

$$|HN||HL| = |HC||HF|$$

Analogicznie dla H i okręgu k_2:

$$|HK||HM| = |HC||HF|$$

Tak więc $|HN||HL| = |HK||HM|$ i możemy skorzystać z twierdzenia. To kończy dowód.

4. Niech Q będzie ustalonym punktem wewnątrz sześcianu K. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele prostych l przechodzących przez Q, takich, że Q jest środkiem części wspólnej l i K.
Rozwiązanie:

(a) Dla każdej prostej l przechodzącej przez Q niech l_Q oznacza jej część wspólną z sześcianem K.

(b) Jeżeli Q jest środkiem sześcianu K to teza jest oczywista. Załóżmy zatem, że Q nie jest środkiem sześcianu. Wtedy istnieje prosta l, prostopadła do pewnej ściany sześcianu taka, że Q leży na l oraz Q **nie** jest środkiem l_Q.

(c) Jeżeli w dowolnej płaszczyźnie zawierającej l znajdziemy **jedną** prostą l taką, że Q jest środkiem l_Q to łącznie znajdziemy nieskończenie wiele prostych (znalezione proste będą parami różne, gdyż płaszczyzny przecinają się tylko na l, a znalezione proste to nie prosta l).

(d) Rozważmy dowolną płaszczyznę zawierającą l. Część wspólna tej płaszczyzny z K jest prostokątem P.
Dla dowolnego punktu A na obwodzie P niech $S(A)$ oznacza taki punkt na obwodzie P że $S(A) \neq A$ oraz punkty $A, Q, S(A)$ są współliniowe. Z definicji wynika $S(S(A)) = A$.
Dla dowolnego punktu A na obwodzie P definiujemy funkcję

$$f(A) = \frac{|AQ|}{|AQ| + |S(A)Q|}$$

Funkcja f jest funkcją ciągłą.

(e) Chcemy znaleźć takie A, że $f(A) = 1/2$.
Niech X będzie dowolnym punktem na obwodzie P. Jeżeli $f(X) = 1/2$ to dobrze. Załóżmy, że $f(X) \neq 1/2$. Zauważmy, że

$$f(S(X)) = 1 - f(X)$$

Jeżeli $f(X) < 1/2$ to $f(S(X)) > 1/2$, a skoro funkcja f jest ciągła to istnieje takie Y, że $f(Y) = 1/2$. Analogicznie rozważamy przypadek $f(X) > 1/2$.

Dziękuję Mateuszowi za pewne poprawki do tego rozwiązania.