Österreichische Mathematik Olympiade

Zwei Dinge sind unendlich, das Universum und die menschliche Dummheit, aber beim Universum bin ich mir nicht ganz sicher. *Albert Einstein*

Łatwiejsze

1. Dla jak wielu liczb całkowitych a takich, że $|a| \leq 2005$ układ równań

$$x^2 = y + a \tag{1}$$
$$y^2 = x + a \tag{2}$$

ma rozwiązania w liczbach całkowitych (x, y)?

2. Mamy dwa przystające trójkąty równoboczne. Jeden z nich jest ustawiony w pewnym układzie współrzędnych "wierzchołkiem w dół", a drugi "wierzchołkiem w górę". Przecięcie tych trójkątów jest sześciokątem. Udowodnić, że 3 odcinki łączące przeciwległe wierzchołki tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

3. Ustalić, dla jakich trójek liczb całkowitych dodatnich (a, b, c) liczba $a + b + c$ jest najmniejszą wspólną wielokrotnością tych trzech liczb.

4. Mamy daną funkcję $f(x) = [x^2] + \{x\}$, gdzie $[a]$ oznacza największą liczbę całkowitą niewiększą niż a, zaś $\{a\} = a - [a]$.
Wykaż, że istnieje nieskończony ciąg arytmetyczny liczb wymiernych, takich, że jeżeli liczba a należy do tego ciągu,to nie istnieje b takie, że $f(b) = a$.
Uwaga: Założenia tezy zostały osłabione w stosunku do wersji z olimpiady.

Trudniejsze

1. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele takich wielokrotności 2005, w których zapisie dziesiętnych cyfry $0, 1, 2, 3 \ldots, 9$ występują wszystkie tyle samo razy (bez liczenia wiodących zer).

2. Liczby a, b, c, d są rzeczywiste dodatnie. Udowodnić, że

$$\frac{a+b+c+d}{abcd} \leq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}.$$

3. Trójkąt ABC jest ostrokątny. Rysujemy dwa okręgi k_1 i k_2, których średnicami są odcinki AC i BC odpowiednio. Niech AD i BE będą wysokościami w ABC.
Niech punkty $L \neq N$ będą punktami przecięcia BE z k_1, przy czym L leży bliżej B niż N oraz punkty $K \neq M$ będą punktami przecięcia AD i k_2, przy czym K leży bliżej A niż M.
Udowodnić, że na czworokącie $KLMN$ da się opisać okrąg.

4. Niech Q będzie ustalonym punktem wewnątrz sześcianu K. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele prostych l przechodzących przez Q, takich, że Q jest środkiem części wspólnej l i K.

Wszystkie zadania pochodzą z Austriackiej Olimpiady Matematycznej