Niezmienniki

kółko I LO Białystok
13 listopada 2012

Ukochaną sytuacją OMów jest "mamy sytuację A wykonujemy jakieś ruchy zmieniające ją, czy możemy dojść do sytuacji B". Zwykle nie da się sprawdzić (mniej lub bardziej inteligentnie) wszystkich możliwości, trzeba więc wybrać *niezmiennik* lub *półniezmiennik* — cechę sytuacji, która nie zmienia się lub zmienia się w dobry dla nas sposób.

Istnieje kanon niezmienników — sposoby często pojawiające się w zadaniach. Poniższe zadania wprowadzają wiele z nich.

Wiele z poniższych zadań pochodzi z warsztatów V LO w Krakowie. Dziękuję!

Zadanie -1 ulubione prof. Kordosa
Mamy puchar z wodą, puchar z winem oraz pusty (mniejszy) pucharek. Zaczerpnięto pełen pucharek wody i przelano ją do wina, następnie zaczerpnięto również pucharek otrzymanej mieszaniny i przelano ją do wody. Czy więcej jest wody w pucharze z winem, czy wina w pucharze z wodą?

Rozwiązanie.
W obu pucharach łączna objętość płynu jest taka sama na początku i na końcu operacji. Wobec tego tyle wody ubyło z pucharka z wody, ile wina przybyło. Czyli wody w winie jest tyle samo ile wina w wodzie.

Zadanie 0
Mamy daną liczbę 2009!. Obliczamy sumę jej cyfr, sumę cyfr liczby tak otrzymanej itd. Uzasadnij, że po skończenie wielu ruchach uzyskamy liczbę jednocyfrową. Jaka to będzie liczba?

Rozwiązanie.
Oznaczmy przez $S(x)$ sumę cyfr x.

Jeżeli mamy liczbę dwu lub więcej cyfrową w postaci $M = a_n \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ to $S(M) = a_n + \ldots + a_1 + a_0$. Skoro $a_i \cdot 10^i \geqslant a_i$ oraz $10^n a_n > a_n$ (ważne: ostra nierówność bo $a_n > 0$ i $n > 0$) to

$$S(M) = a_n + \ldots + a_0 < a_n \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 = M$$

więc branie sumy cyfr zmniejsza liczbę, o ile nie jest ona jednocyfrowa.

Jeżeli startujemy z X to po każdej operacji otrzymujemy liczbę dodatnią. Gdyby liczby otrzymywane w $X+1$ kolejnych krokach były dwu lub więc cyfrowe, to w każdym z nich zmniejszalibyśmy otrzymaną liczbę, więc po X krokach otrzymalibyśmy liczbę nie większą niż $X-(X+1) = -1$. Ale suma liczb liczby dodatniej nie może być ujemna. Sprzeczność! Wobec tego po skończenie wielu krokach otrzymamy liczbę jednocyfrową dodatnią. *W tym wypadku półniezmiennikiem była po prostu wartość liczby otrzymywanej w kolejnych krokach i fakt, że zmniejszała się ona.*

Reszta z dzielenia liczby przez 9 nie zmienia się (to cecha podzielności przez 9) a 2009! jest podzielna, więc otrzymamy 9.

1.1 Niegeometryczne

Zadanie 1 Nowogród 2012
Na tablicy zapisano liczbę uzyskaną przez podniesienie liczby siedem do potęgi 2012^{2012}. W jednym kroku ścieramy pierwszą (od lewej) cyfrę C liczby zapisanej na tablicy, otrzymując liczbę b, ścieramy również liczbę b i zapisujemy na tablicy $b + C$.

Po pewnej liczbie kroków otrzymaliśmy liczbę dziesięciocyfrową. Wykaż, że dwie jej cyfry są jednakowe. *Używamy systemu dziesiętnego.*

Zadanie 2
Dana jest tablicy 2011×2011 wypełniona na początku liczbami -1. W każdym ruchu 2012 liczb przez -1. Uzasadnij, że nie możemy otrzymać planszy wypełnionej jedynkami.

1.2 Geometryczne

Tutaj jest mało standardowych. Znane to **pole**, **obwód**, **środek ciężkości**, **wyróżnienie części** i **pozostałe ;)**.

Zadanie 3
Na tarczy zegara w miejsce liczb wkręcono żarówki. Żarówka na godzinie 12 jest zapalona, pozostałe są

zgaszone. Możemy wybierać dowolne 6 kolejnych żarówek i jednocześnie zmieniać stan wszystkich tych żarówek. Czy możemy w ten sposób doprowadzić do tego, by świeciła tylko jedna żarówka na godzinie 11?

Zadanie 4

Fredek gra w samotnika. Plansza do gry ma kształt n–kąta foremnego. Na każdym wierzchołku tego n–kąta stoi kieliszek, niektóre kieliszki są napełnione. Jedno posunięcie polega na tym, że Fredek wypija zawartość dowolnie wybranego kieliszka oraz zawartość tych sąsiednich kieliszków, które były napełnione i jednocześnie napełnia te sąsiednie kieliszki, które były puste. Jeśli po pewnym posunięciu wszystkie kieliszki są puste, to Fredek idzie się napić. Uzasadnij, że jeśli n jest podzielne przez 3 i na początku jedynie jeden kieliszek jest napełniony, to Fredek nie pójdzie się napić.

Zadanie 5 matma.ilo.pl

Wokół okrągłego stołu siedzi 2012 ufoli. Początkowo jeden z ufoli ma 2012 czarnych dziur. W jednym ruchu każdy ufol, który posiada co najmniej dwie czarne dziury, może wziąć dwie ze swoich czarnych dziur i podarować po jednej czarnej dziurze każdemu ufolowi siedzącemu obok. Powiedz ufolom, czy może dojść do sytuacji, gdy po pewnej liczbie ruchów każdy ufol ma po jednej czarnej dziurze.

Zadanie 6 LVII OM, etap 2, mniej więcej

Trójkąt równoboczny o boku długości 2012 jest złożony z płytek w kształcie trójkącików równobocznych o boku długości 1, mających jedną stronę pokolorowaną na karolinowo a drugą na szymonowo. Trójkącik można odwrócić, jeżeli sąsiaduje z co najmniej dwoma trójkącikami mającymi widoczną stronę w innym kolorze. Uzasadnij, że nie istnieje ustawienie startując od którego możemy odwracać trójkąciki bez końca.

Zadanie 7 Epidemia

Uczniowie piszą olimpiadę ustawieni w kwadrat 2012×2012. Jeżeli dwóch uczniów sąsiadujących z A (z boku/przodu/tyłu, nie po przekątnej) jest zniechęconych, zniechęca się także uczeń A.

Uzasadnij, że jeśli na końcu cała sala jest zniechęcona, to na początku zniechęconych musiało być co najmniej 2012 uczniów.

Zadanie 8

Dana jest szachownica 2010×2010. Na każdym polu leży kamień. Dwa kamienie leżą na pewnym wierszu/kolumnie/przekątnej tak, że oddziela je jedno pole możemy je przełożyć na to pole. Uzasadnij, że kamieni nie da się zgromadzić w jednym punkcie.