Niewymierne?

kółko I LO Białystok
11 września 2012

Całkiem możliwe, że coś poniżej jest nie tak. Jeśli zauważycie coś piszcie! I nie myślcie, że się wygłupicie.

Zadanie 1
Czy liczba $\sqrt{2}$ jest wymierna?

Szkic rozwiązania
Jeżeli $\sqrt{2} = p/q$, gdzie p, q całkowite, to $2q^2 = p^2$. Najwyższa potęga 2 dzieląca liczbę po lewej stronie jest parzysta, a po prawej — nieparzysta.

Identyczne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnej innej liczby $\sqrt{n}$, o ile n nie jest kwadratem liczby całkowitej. Zamiast 2 analizuje się wtedy potęgi liczb pierwszych dzielących n.

Dobrym wnioskiem z tego zadania jest ogólna i banalna, lecz użyteczna prawda: jeżeli liczba A jest niewymierna, a b wymierna, to wyrażenie $b \cdot A$ jest wymierne tylko jeśli $b = 0$.

Zadanie 2
Czy liczba $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$ jest wymierna?

Rozwiązanie.
Nie. Potęgi liczby wymiernej są wymierne, więc gdyby liczba z zadania była wymierna, wymierna byłaby także $\sqrt{2}+1$, a więc i $\sqrt{2}$, co nie jest prawdą.

Zadanie 3
Czy liczba $(1-\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{2})^2$ jest wymierna?
$\star$. Czy liczba $(1-\sqrt{2})^{2012} + (1+\sqrt{2})^{2012}$ jest wymierna?

Rozwiązanie.

1. Liczba ta jest równa 6, a więc jest wymierna.
2. Sytuacja jest identyczna jak w poprzednim podpunkcie. Tutaj, zamiast obliczać wynik bezpośrednio korzystamy ze wzoru dwumianowego Newtona. Głosi on, że dla dowolnych liczb a, b zachodzi
$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2}b^2 \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot ab^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n$$
gdzie $\binom{n}{*}$ są liczbami całkowitymi niezależnymi od a, b (wzór podaje również, że $\binom{n}{k} = n!(k!(n-k)!)^{-1}$, ale nie będzie nam to potrzebne.
Wobec tego, ze wzoru
$$(1+\sqrt{2})^{2012} = \binom{2012}{0} + \binom{2012}{1}\sqrt{2} + \binom{2012}{2} \cdot 2 + \ldots \text{ oraz}$$
$$(1-\sqrt{2})^{2012} = (1+(-\sqrt{2}))^{2012} = \binom{2012}{0} - \binom{2012}{1}\sqrt{2} + \binom{2012}{2} \cdot 2 - \ldots$$
z tych wzorów wynika, że liczba niewymierna $\binom{n}{k} \cdot \sqrt{2}^k$ skróci się (bo k jest nieparzyste!) z $\binom{n}{k} \cdot (-\sqrt{2})^k$ i otrzymana liczba będzie wymierna, a więc całkowita.

Zadanie 4
Udowodnij, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ nie jest wymierna.
$\star$. Czy liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ jest wymierna? *Wskazówka:* $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$, *pozbądź się* $\sqrt{3}$.
$\star$. Czy liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ jest wymierna?

Szkic rozwiązania

1. Gdyby $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ była wymierna, po podniesieniu jej do kwadratu stwierdzilibyśmy, że $5+2\sqrt{6}$ jest wymierne, co nie jest prawdą (patrz zadanie 1).

2. *Przykładowe rozwiązanie.*

   Niech $w := \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ będzie wymierna, wtedy

   $$w^2 - 2w\sqrt{6} + 6 = (w-\sqrt{6})^2 = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

   Skoro $\sqrt{6}$ jest niewymierne, to jego wystąpienia z obu stron skracają się, więc $w = -1$. Co jest nonsensem, bo $w > 0$ z definicji.

   Inne rozwiązanie

   Tak jak poprzednio oznaczamy w, ale tym razem przekształcamy równanie do postaci $\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot(\sqrt{2}+1) = w$, stąd

   $$\sqrt{3} = \frac{w-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = (w-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}-1) = (w+1)\cdot\sqrt{2} + (-2-w)$$

   po podniesieniu do kwadratu stwierdzamy, że $\sqrt{2}\cdot(w+1)\cdot(-w-2)$ jest wymierne, stąd $w+1=0$ lub $-w-2=0$, oba przypadki wykluczone przez proste szacowanie $w>3$.

3. Znowu: niech $w := \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, wtedy $w-\sqrt{5} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ i (używamy q na oznaczenie liczby wymiernej, która nas nie obchodzi)

   $$(w-\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 0 \text{ czyli } -2w\sqrt{5} - 2\sqrt{6} + q = 0, q \in \mathbb{Q}$$

   Przerzucając q na drugą stronę i znowu podnosząc do kwadratu stwierdzamy, że $8\cdot w\cdot\sqrt{30}$ jest wymierne, więc $w = 0$. Co jest bez sensu, skoro $w > 0$.

Lemat 1.1. *Liczba wymierna p/q (p, q są całkowite) jest pierwiastkiem wielomianu $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ o współczynnikach całkowitych. Uzasadnij, że p/q jest całkowite.*

Dowód. Skracając ułamek możemy założyć, że p i q nie mają wspólnych dzielników pierwszych.

Podstawmy p/q pod x otrzymując

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

i pomnóżmy przez q^{n-1} otrzymując

$$\frac{p^n}{q} + a_{n-1}\cdot p^{n-1} + a_{n-2}\cdot p^{n-2}q + \ldots + a_0\cdot q^{n-1} = 0$$

Wszystkie wyrazy sumy poza p^n/q są całkowite, więc i p^n/q jest całkowite. A stąd wynika, że i p/q jest całkowite (patrz na rozkład na czynniki pierwsze). □

Zadanie 5

Udowodnij, że jeśli x jest całkowity, to liczba $\sqrt{x}$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowita.

Udowodnij ponownie, że liczba $\sqrt{3}$ nie jest wymierna.

Rozwiązanie.

Liczba $\sqrt{x}$ jest pierwiastkiem wielomianu $P(X) = X^2 - x$. Skoro x jest całkowity, to wielomian ten spełnia warunki lematu, więc wprost z lematu wynika, że jeśli $\sqrt{x}$ jest wymierny, to jest całkowity.

Skoro $1 < \sqrt{3} < 2$, to liczba ta nie jest całkowita a więc i (wobec powyższego!) nie jest wymierna.