3... 2... 1... START!
KONGRUENCJE

Magdalena Szarkowska
7 października 2013

Zadanie 1
Oblicz ostatnią cyfrę liczby 3^{64} .(resztę z dzielenia liczby 3^{64} przez 10). Czy potrafisz policzyć resztę z dzielenia tej liczby przez 8?

Trochę teorii na dobry początek
Niech n będzie liczbą naturalną, a liczby a i b liczbami całkowitymi.
Mówimy, że a przystaje do b modulo n, jeżeli liczby a i b dają taką samą resztę z dzielenia przez n (innymi słowy, gdy n|a-b). Zapisujemy to ***a ≡ b mod n****.*
Np.:
12/5=2 r. 2
27/5=5 r. 2
Zatem 12≡27 mod 5.

Dość oczywiste własności kongruencji
jeżeli a ≡ b mod n, to b ≡ a mod n
jeżeli a ≡ b mod n i b ≡ c mod n, to a ≡ c mod n

Inne ważne własności
Jeżeli a ≡ b mod n oraz c ≡ d mod n, to
a+c ≡ b+d mod n
a-c ≡ b-d mod n
a·c ≡ b·d mod n
$a^m \equiv b^m$ *mod n, dla m będącego liczbą naturalną, np.* $a^2 \equiv b^2$ *mod n*

Przykład
Ile wynosi reszta z dzielenia przez 13 liczby $40^{29} \cdot 18^{24}$?
Wiemy, że 40 ≡ 1 mod 13, zatem z własności kongruencji mamy $40^{29} \equiv 1^{29} = 1$ mod 13.
18 ≡ 5 mod 13, czyli $18^2 \equiv 5^2 = 25 \equiv -1$ mod 13. $18^{24} = (18^2)^{12} \equiv (-1)^{12} = 1$ mod 13.
Uzyskujemy zatem $40^{29} \cdot 18^{24} \equiv 1 \cdot 1 = 1$ mod 13.

Zadanie 2
Jaką resztę z dzielenia przez 7 daje liczba 10^{2013}?

Zadanie 3
Dowiedź, że liczba n daje taką samą resztę z dzielenia przez 9 jak suma jej cyfr.

Zadanie 4
Dowiedź, że jeśli $a^2+b^2=c^2$ dla pewnych liczb całkowitych a, b, c, to co najmniej jedna z nich jest podzielna przez 3. Czy któraś z liczb musi być podzielna przez 4? A przez 5? A 6?

Zadanie 5
Dowiedź, że jeśli a, b są całkowite i $7|a^2+b^2$ to 7|a i 7|b.

Zadanie 6
Niech x, y, z będą liczbami całkowitymi. Wykaż, że jeżeli $7|x^3+y^3+z^3$ to 7|xyz.

Zadanie 7
Wykaż, że jeżeli liczby całkowite x, y, z są takie, że $8|x^2+y^2+z^2-2$ to któraś z liczb x, y, z jest podzielna przez 4.