Czy to jest dowód?

kółko I LO Białystok
26 marca 2013

Zadania na kółko

Należy wybrać zadanie z poniższych trzech i postarać się rozwiązać je w grupie; po wszystkim każdy z grupy powinien rozumieć, o co chodzi w rozwiązaniu i umieć je wytłumaczyć.

Zadanie 1
Suma dziesięciu liczb całkowitych dodatnich jest równa 1001. Wyznacz największą możliwą wartość największego wspólnego dzielnika tych liczb.

Rozwiązanie.
Oznaczmy liczby przez $a_1, \ldots, a_{10}$ i niech D oznacza ich największy wspólny dzielnik. Skoro $D|a_1, D|a_2, \ldots$ to

$$D|a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 1001.$$

Ponadto, skoro $a_1/D, a_2/D, \ldots$ są całkowite, to

$$\frac{1001}{D} = \frac{a_1}{D} + \frac{a_2}{D} + \ldots + \frac{a_{10}}{D} \geqslant 1 + 1 + \ldots + 1 = 10,$$

czyli $1001 \geqslant 10 \cdot D$, stąd $100 \geqslant D$. Chcemy teraz znaleźć największe D spełniające podany warunek. Liczba 1001 rozkłada się na $7 \cdot 13 \cdot 11$; nietrudno sprawdzić, że największym jej dzielnikiem mniejszym od 100 jest $D = 7 \cdot 13 = 91$.

Dla $D = 91$ łatwo znaleźć odpowiednie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Są to $a_1 = a_2 = \ldots = a_9 = 91, a_{10} = 2 \cdot 91$.

Zadanie 2
Wykaż, że kwadrat obwodu trójkąta jest większy niż dwunastokrotność jego pola.

Zadanie 3
Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ jest podzielna przez 8.

Rozwiązanie.
Najważniejszą obserwacją jest, że $5^2, 3^2$ dają resztę 1 z dzielenia przez 8 — “nie liczą się”. Wobec tego liczby $5^{2k} = \left(5^2\right)^k$ oraz 3^{2k} także dają resztę 1 z dzielenia przez 8.

Zapiszmy teraz $n = 2q + r$, gdzie $r \in \{0, 1\}$. Wtedy $5^n = 5^{2q} \cdot 5^r$, więc 5^n daje taką samą resztę z dzielenia przez 8 jak 5^r. Podobnie, 3^n daje taką samą resztę z dzielenia przez 8 jak 3^r.

Zysk z całej operacji jest taki, że r ma tylko dwie możliwe wartości — $\{0, 1\}$. Popatrzmy na oba przypadki:

1. Jeżeli n jest parzysta, czyli $r = 0$, to 5^n daje resztę 1, a 3^{n-1} daje resztę 3, to liczba $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ daje resztę $1 + 2 \cdot 3 + 1 = 8$, czyli jest podzielna.
2. Jeżeli n jest nieparzysta, to $r = 1$. W tym przypadku 5^n daje resztę 5 z dzielenia przez 8, zaś 3^{n-1} daje resztę 1 z dzielenia przez 8. Liczba $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ daje więc resztę $5 + 2 \cdot 1 + 1 = 8$ z dzielenia przez 8, czyli jest podzielna.

II rozwiązanie
To rozwiązanie korzysta z kongruencji, i mówi dokładnie to samo, co poprzednie, tylko innym językiem. Kongruencje są opisane w pliku 123∞*, zachęcam ogólnie do czytania – ma jedynie* 14 *stron.*

Zauważmy, że $5^2 \equiv 3^2 \equiv 1 \mod 8$. Zapiszmy $n = 2q + r$, gdzie $r \in \{0, 1\}$. Wtedy

$$5^n = \left(5^2\right)^q \cdot 5^r \equiv 1^q \cdot 5^r = 5^r \mod 8, \quad \text{analogicznie } 3^{n-1} \equiv 3^{n+1} \equiv 3^{r+1} \mod 8.$$

Analizujemy przypadki $r = 0$ i $r = 1$:

1. Jeżeli $r = 0$ to $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 \equiv 1 + 2 \cdot 3 + 1 \equiv 0 \mod 8$.
2. Jeżeli $r = 1$ to $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 \equiv 5 + 2 \cdot 1 + 1 \equiv 0 \mod 8$.