# Kupą mości panowie!

## epizod II, rozwiązania

kółko I LO Białystok

9 marca 2013

---

**Zadanie 1** z poprzedniego kółka

Wykaż, że kwadrat obwodu trójkąta jest większy niż dwunastokrotność jego pola.

*Rozwiązanie.*

Oznaczmy boki trójkąta przez $a, b, c$, wtedy kwadrat odwodu to $(a+b+c)^2$. Oznaczmy również przez $P$ pole trójkąta.

Jeżeli $h$ oznacza długość wysokości opuszczonej na bok $a$, to mamy $b \geqslant h$ oraz $c \geqslant h$. Wobec tego

$$ab \geqslant 2 \cdot \left(\frac{ab}{2}\right) = 2P.$$

Analogicznie $bc \geqslant 2P,\ ca \geqslant 2P$, wobec tego

$$(a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2 \cdot (ab+bc+ca) > 2 \cdot (ab+bc+ca) \geqslant 2 \cdot 6P = 12P.$$

* * ** *** ***** ******** *************

**Zadanie 2** V PTM, gimn koresp.

Czy więcej dzielników dodatnich liczby $2013^{2013}$ kończy się jedynką, czy trójką? Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 3**

Wykaż, że jeśli $p$ jest liczbą pierwszą, to równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}.$$

ma dokładnie trzy rozwiązania w liczbach naturalnych dodatnich $x, y$.

*Rozwiązanie.*

*Najważniejsze jest (wielokrotne) korzystanie z faktu, że $p$ jest pierwsza, więc $p|ab$ implikuje $p|a$ lub $p|b$.*

Załóżmy, że $(x, y)$ jest rozwiązaniem równania i pomnóżmy obie strony przez $pxy$, otrzymując

$$py + px = xy, \text{ czyli } p(x+y) = xy.$$

Wynika stąd, że $p|x$ lub $p|y$. Załóżmy (ew. zmieniając miejscami $x$ i $y$), że $p|x$, niech $x = pk$, wtedy

$$x + y = ky, \text{ stąd } pk = x = (k-1)y.$$

Wynika stąd, że $k-1|p$, więc $k-1$ może przyjmować jedną z czterech wartości: $-p, -1, 1, p$. Liczba $x/y = k-1$ jest dodatnia, więc pozostają nam dwie możliwości:

1. $k-1 = 1$. Wtedy $x = 2p$, więc $y = 2p$.
2. $k-1 = p$, więc $x = (p+1)p$ i $y = p+1$.

Przypomnijmy teraz, że dokonaliśmy założenia, że $p|x$. Analogicznie rozważając sytuację $p|y$ znajdujemy ponownie rozwiązanie $x = y = 2p$ oraz nowe rozwiązanie $x = p+1, y = p(p+1)$, łącznie są trzy rozwiązania.

**Zadanie 4**

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg $\omega$. Wykazać, że dwusieczne kątów $\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle ADB$ przecinają się w punkcie leżącym na okręgu $\omega$.

*Rozwiązanie.*

Oznaczmy przez $X$ punkt przecięcia dwusiecznej $\sphericalangle ACB$ z okręgiem $\omega$. Kąty $\sphericalangle XCA, \sphericalangle XCB$ są równe, więc łuki $XA$ i $XB$ są równe, czyli $X$ jest środkiem łuku $AB$ niezawierającego $C$.

Analogiczne rozumowanie przeprowadzone dla $\sphericalangle ADB$ potwierdza, że dwusieczna ta przechodzi przez środek łuku $AB$ niezawierającego $D$, czyli przez punkt $X$!

*Przed eliminacjami i PTMem.*

*Ogólnie do jednego i drugiego potrzeba mało teorii, teoretycznie osoby z różnych szkół bez teorii muszą dać radę poradzić sobie. Ale teoria oczywiście pomaga.*

*Proponowałbym spróbować poczytać 123infty.pdf (na stronie po lewej, z królikiem), a szczególnie początek i pierwsze trzy zadania z sekcji "Algebra" oraz podsekcje "Kongruencje" w Teorii liczb i "Zasada szufladkowa Dirichleta" w kombinatoryce. Są one przyjazne użytkownikowi (tylko kongruencje wprowadzają coś istotnie nowego), a w razie czego służę pomocą mailową.*

*Yogi*