Fermat, Euler i inne chłopaki

1.1 Teoria

1. **Twierdzenie 1.1 (Małe twierdzenie Fermata)** *Jeżeli p jest liczbą pierwszą, zaś a jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p, to*
$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p.$$

2. **Twierdzenie 1.2 (Małe twierdzenie Fermata, równoważnie)** *Jeżeli p jest liczbą pierwszą, zaś a jest liczbą całkowitą, to*
$$a^p \equiv a \mod p.$$

   Wypadł tutaj warunek $p \not\Big| a$.

3. **Definicja 1.3** *Liczbę takich $a \in \{1, 2, \dots, n\}$, że a jest względnie pierwsze z n, oznaczam jako $\phi(n)$.*

4. **Twierdzenie 1.4 (Eulera)** *Niech n będzie liczbą naturalną, zaś a liczbą całkowitą względnie pierwszą z n tj. $NWD(a, n) = 1$. Wtedy*
$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n,$$
   gdzie $\phi(n)$ jest zdefiniowane jak wyżej.

1.2 Zadania

1. Zadanie
   Uzasadnij (najlepiej bez obliczeń), że
   (a) $21 \Big| 1^7 + 2^7 + \cdots + 6^7$,
   (b) $21 \Big| 1^{600001} + 2^{600001} + \cdots + 6^{600001}$.

   Wskazówka: $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$. *Hm, czyżby zachodziło jakieś przystawianie* $\mod$ *21 ;).*

2. Zadanie
   Udowodnij (w skończonym czasie; da się bez obliczeń), że dla dowolnej liczby całkowitej a, liczba a^{1005} daje z dzielenia przez 2011 resztę ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$.

3. Zadanie
   Udowodnij, że:
   (a) $7^6 \equiv 6^6 \equiv 1 \mod 43$,
   (b) jeżeli $n = 6k - 1$ ($k \in \mathbb{Z}$), to $43 \Big| 7^n - 6^n - 1$,
   (c) jeżeli $n = 6k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$), to $43 \Big| 7^n - 6^n - 1$,
   (d) jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 3, to $43 \Big| 7^p - 6^p - 1$.

4. Zadanie
   Niech a, b będą względnie pierwszymi liczbami całkowitymi. Udowodnij, że istnieją liczby dodatnie m, n, takie, że
$$ab \Big| a^m + b^n - 1.$$

5. Udowodnij, że jeśli p jest liczbą pierwszą, a a jest taką liczbą całkowitą, że $p \Big| a^p - 1$ to

   (a) $p \Big| a - 1$,

   (b) $p^2 \Big| a^p - 1$.

6. * Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$ będą takie, że $a + b + c = 0$. Rozstrzygnij, czy $a^{61} + b^{61} + c^{61}$ może być liczbą pierwszą.

7. ** Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę pierwszą p, że liczba

$$2^{120!} - 1$$

jest podzielna przez p i nie jest podzielna przez p^2. *Wskazówka: ile wynosi* $\phi(p^2)$?