



[](#)
[Zadania PDF.](#)

Źródło zadań w texu.

```
%      File: niezm_krak.tex %      Created: Sun Nov 11 09:00 PM 2012 C % Last Change:
Sun Nov 11 09:00 PM 2012 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb}
usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm,
textheight=27cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc}
usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem}
setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdftitle={0 0
0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % -----
vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full
h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -----
newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek}
newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja}
newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza}
newcommand{HRule}{rule[linewidth]{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm}
stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm}
includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture}
end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center
#1} vskip 1mm small normalfont sc author{\ date{
end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{
vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][
stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}} { }
pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle}
renewcommand{vec}[1]{\overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{\leqslant}
renewcommand{geq}{\geqslant} renewcommand{dots}{\ldots} defsectionwidth{6cm}
defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{13 listopada 2012}
begin{document} section{Niezmienniki} Ukochaną sytuacją OMów jest ``mamy sytuację $A$
wykonujemy jakieś ruchy zmieniające ją, czy możemy dojść do sytuacji $B$". Zwykle nie da się
```

sprawdzić (mniej lub bardziej inteligentnie) wszystkich możliwości, trzeba więc wybrać $\text{emph}\{\text{niezmiennik}\}$ lub $\text{emph}\{\text{pólniezmiennik}\}$ --- cechę sytuacji, która nie zmienia się lub zmienia się w~dobry dla nas sposób. Istnieje kanon niezmienników --- sposoby często pojawiające się w~zadaniach. Poniższe zadania wprowadzają wiele z~nich. $\text{emph}\{\text{Wiele z~poniższych zadań pochodzi z~warsztatów V LO w~Krakowie. Dziękuję!}\}$

$\text{setcounter}\{\text{problem}\}\{-2\}$ $\text{begin}\{\text{problem}\}$ [ulubione prof.~Kordosa] Mamy puchar z~wodą, puchar z~winem oraz pusty (mniejszy) pucharek. Zaczepnięto pełen pucharek wody i~przelano ją do wina, następnie zaczepnięto również pucharek otrzymanej mieszaniny i~przelano ją do wody. Czy więcej jest wody w~pucharze z~winem, czy wina w~pucharze z~wodą? $\text{end}\{\text{problem}\}$ $\text{begin}\{\text{sol}\}$ W~obu pucharach łączna objętość płynu jest taka sama na początku i~na końcu operacji. Wobec tego tyle wody ubyło z~pucharka z~wody, ile wina przybyło. Czyli wody w~winie jest tyle samo ile wina w~wodzie. $\text{end}\{\text{sol}\}$ $\text{begin}\{\text{problem}\}$ Mamy daną liczbę $\$2009!\$$. Obliczamy sumę jej cyfr, sumę cyfr liczby tak otrzymanej itd. Uzasadnij, że po skończeniu wielu ruchach uzyskamy liczbę jednocyfrową. Jaka to będzie liczba? $\text{end}\{\text{problem}\}$ $\text{begin}\{\text{sol}\}$ Oznaczmy przez $\$S(x)\$$ sumę cyfr $\$x\$$. Jeżeli mamy liczbę dwu lub więcej cyfrową w~postaci $\$M = a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0\$$ to $\$S(M) = a_n + \dots + a_1 + a_0\$$. Skoro $\$a_i \cdot 10^i \geq a_i\$$ oraz $\$10^i a_n > a_n\$$ (ważne: ostra nierówność bo $\$a_n > 0\$$ i $\$n > 0\$$) to $\$S(M) = a_n + \dots + a_0 < a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 = M\$$ więc branie sumy cyfr zmniejsza liczbę, o~ile nie jest ona jednocyfrowa. Jeżeli startujemy z~ $\$X\$$ to po każdej operacji otrzymujemy liczbę dodatnią. Gdyby liczby otrzymywane w~ $\$X+1\$$ kolejnych krokach były dwu lub więcej cyfrowe, to w~każdym z~nich zmniejszalibyśmy otrzymaną liczbę, więc po $\$X\$$ krokach otrzymalibyśmy liczbę nie większą niż $\$X - (X+1) = -1\$$. Ale suma liczb dodatniej nie może być ujemna. Sprzeczność! Wobec tego po skończeniu wielu krokach otrzymamy liczbę jednocyfrową dodatnią. $\text{emph}\{\text{W~tym wypadku pólniezmiennikiem była po prostu wartość liczby otrzymywanej w~kolejnych krokach i~fakt, że zmniejszała się ona.}\}$ Reszta z~dzielenia liczby przez $\$9\$$ nie zmienia się (to cecha podzielności przez $\$9\$$) $a \sim \$2009!\$$ jest podzielna, więc otrzymamy $\$9\$$. $\text{end}\{\text{sol}\}$ $\text{subsection}\{\text{Niegeometryczne}\}$

$\text{begin}\{\text{problem}\}$ [Nowogród 2012] Na tablicy zapisano liczbę uzyskaną przez podniesienie liczby siedem do potęgi $\$2012^{2012}\$$. W~jednym kroku ścieramy pierwszą (od lewej) cyfrę $\$C\$$ liczby zapisanej na tablicy, otrzymując liczbę $\$b\$$, ścieramy również liczbę $\$b\$$ i~zapisujemy na tablicy $\$b + C\$$. Po pewnej liczbie kroków otrzymaliśmy liczbę dziesięciocyfrową. Wykaż, że dwie jej cyfry są jednakowe. $\text{emph}\{\text{Używamy systemu dziesiętnego.}\}$ $\text{end}\{\text{problem}\}$ $\text{begin}\{\text{problem}\}$ Dana jest tablica $\$2011 \text{ times } 2011\$$ wypełniona na początku liczbami $\$-1\$$. W~każdym ruchu $\$2012\$$ liczb przez $\$-1\$$. Uzasadnij, że nie możemy otrzymać planszy wypełnionej jedynkami. $\text{end}\{\text{problem}\}$

$\text{subsection}\{\text{Geometryczne}\}$ Tutaj jest mało standardowych. Znane to $\text{textbf}\{\text{pole}\}$, $\text{textbf}\{\text{obwód}\}$, $\text{textbf}\{\text{środek ciężkości}\}$, $\text{textbf}\{\text{wyróżnienie części}\}$ i~ $\text{textbf}\{\text{pozostałe ;}\}$.

$\text{begin}\{\text{problem}\}$ Na tarczy zegara w~miejscie liczb wkręcono żarówki. Żarówka na godzinie $\$12\$$ jest zapalona, pozostałe są zgaszone. Możemy wybierać dowolne 6 kolejnych żarówek i~jednocześnie zmieniać stan wszystkich tych żarówek. Czy możemy w~ten sposób doprowadzić do tego, by świeciła tylko jedna żarówka na godzinie $\$11\$$? $\text{end}\{\text{problem}\}$

$\text{begin}\{\text{problem}\}$ Fredek gra w~samotnika. Plansza do gry ma kształt $\$n\$$ -kąta foremnego. Na każdym wierzchołku tego $\$n\$$ -kąta stoi kieliszek, niektóre kieliszki są napełnione. Jedno posunięcie polega na tym, że Fredek wypija zawartość dowolnie wybranego kieliszka oraz zawartość tych sąsiednich kieliszków, które były napełnione i~jednocześnie napełnia te

sąsiednie kieliszki, które były puste. Jeśli po pewnym posunięciu wszystkie kieliszki są puste, to Fredek idzie się napić. Uzasadnij, że jeśli n jest podzielne przez 3 i na początku jedynie jeden kieliszek jest napełniony, to Fredek nie pójdzie się napić. end{problem}

begin{problem}[matma.ilo.pl] Wokół okrągłego stołu siedzi 2012 ufoli. Początkowo jeden z ufoli ma 2012 czarnych dziur. W jednym ruchu każdy ufol, który posiada co najmniej dwie czarne dziury, może wziąć dwie ze swoich czarnych dziur i podarować po jednej czarnej dziurze każdemu ufolowi siedzącemu obok. Powiedz ufolom, czy może dojść do sytuacji, gdy po pewnej liczbie ruchów każdy ufol ma po jednej czarnej dziurze. end{problem}

begin{problem}[LVII OM, etap 2, mniej więcej] Trójkąt równoboczny o boku długości 2012 jest złożony z płytek w kształcie trójkątów równobocznych o boku długości 1 , mających jedną stronę pokolorowaną na karolinowo a drugą na szymonowo. Trójkąt można odwrócić, jeżeli sąsiaduje z co najmniej dwoma trójkątami mającymi widoczną stronę w innym kolorze. Uzasadnij, że nie istnieje ustawienie startując od którego możemy odwracać trójkąty bez końca. end{problem}

begin{problem}[Epidemia] Uczniowie piszą olimpiadę ustawieni w kwadrat 2012×2012 . Jeżeli dwóch uczniów sąsiadujących z A (z boku/przodu/tyłu, nie po przekątnej) jest zniechęconych, zniechęca się także uczeń A . Uzasadnij, że jeśli na końcu cała sala jest zniechęcona, to na początku zniechęconych musiało być co najmniej n uczniów. end{problem}

begin{problem} Dana jest szachownica 2010×2010 . Na każdym polu leży kamień. Dwa kamienie leżą na pewnym wierszu/kolumnie/przekątnej tak, że oddziela je jedno pole możemy je przełożyć na to pole. Uzasadnij, że kamieni nie da się zgromadzić w jednym punkcie. end{problem} end{document}