

Zadania grupowe II

Wpisany przez Joachim Jelisiejew

sobota, 13 kwietnia 2013 13:44 - Poprawiony sobota, 13 kwietnia 2013 13:46



[Zadania PDF.](#)



[Rozwiązania PDF.](#)

Źródło zadań w texu.

```
%      File: mlodsi.tex %      Created: Mon Apr 08 09:00 PM 2013 C % Last Change: Mon
Apr 08 09:00 PM 2013 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb}
usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm,
textheight=24cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc}
usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem}
setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdftborder={0 0
0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % -----
vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full
h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -----
newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek}
newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja}
newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza}
newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm}
stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm}
includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture}
end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center
#1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{}
```

Zadania grupowe II

Wpisany przez Joachim Jelisiejew

sobota, 13 kwietnia 2013 13:44 - Poprawiony sobota, 13 kwietnia 2013 13:46

```
end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{
vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][
stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}{ }
pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle}
renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant}
renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{6cm}
defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{kółko l~LO Białystok} defdate{9 marca 2013}
begin{document} section{Large Kupą mości panowie![0.2cm]large epizod II}
begin{problem}[z~poprzedniego kółka] Wykaż, że kwadrat obwodu trójkąta jest większy niż
dwunastokrotność jego pola. end{problem} begin{center} * * * * *
***** end{center} begin{problem}[V PTM, gimn koresp. -- uwaga! Ten etap wciąż trwa,
nie pokazywać rozwiązań!] Czy więcej dzielników dodatnich liczby  $2013^{2013}$  kończy
się jedyneką, czy trójką? Odpowiedź uzasadnij. end{problem} begin{problem} Wykaż, że
jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, to równanie  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$  ma
dokładnie trzy rozwiązania w liczbach naturalnych dodatnich  $x, y$ . end{problem}
begin{problem} Czworokąt  $ABCD$  jest wpisany w okrąg  $\Omega$ . Wykazać, że
dwusieczne kątów  $\angle ACB$  i  $\angle ADB$  przecinają się w punkcie leżącym na
okręgu  $\Omega$ . end{problem} vspace{1cm} {longit Przed eliminacjami i~PTMem.
Ogólnie do jednego i~drugiego potrzeba mało teorii, teoretycznie osoby z~różnych szkół bez
teorii muszą dać radę poradzić sobie. Ale teoria oczywiście pomaga. Proponowałbym
spróbować poczytać 123infy.pdf (na stronie po lewej, z~królikiem), a~szczególnie początek
i~pierwsze trzy zadania z~sekcji ``Algebra" oraz~podsekcje ``Kongruencje" w~Teorii liczb
i~``Zasada szufladkowa Dirichleta" w~kombinatoryce. Są one przyjazne użytkownikowi (tylko
kongruencje wprowadzają coś istotnie nowego), a~w~razie czego służę pomocą mailową.
Yogi} end{document}
```

Źródło rozwiązań w texu.

```
% File: mlodsi.tex % Created: Mon Apr 08 09:00 PM 2013 C % Last Change: Mon
Apr 08 09:00 PM 2013 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb}
usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm,
textheight=24cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc}
usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem}
setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdfborder={0 0
0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % -----
vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full
h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -----
newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek}
newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja}
newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza}
newcommand{HRule}{rule[linewidth]{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm}
stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm}
```

```

includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture}
end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth}begin{center}{Huge bfseries center
#1}vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{}
end{center}end{minipage}end{center}HRule}newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{
vskip 3mm noindentemph{#1}}{ }newcounter{problem}newenvironment{problem}[1][
stepcounter{problem}vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}{ }
pagestyle{empty}defabs #1{leftvert #1rightvert}renewcommand{angle}{sphericalangle}
renewcommand{vec}[1]{\overrightarrow{#1}}renewcommand{leq}{\leqslant}
renewcommand{geq}{\geqslant}renewcommand{dots}{\ldots}defsectionwidth{6cm}
defheadpicture{../micek-2cm.jpg}defauthor{kółko l~LO Białystok}defdate{9 marca 2013}
begin{document}section{Large Kupą mości panowie!\[0.2cm]large epizod II, rozwiązania}
begin{problem}[z~poprzedniego kółka]Wykaż, że kwadrat obwodu trójkąta jest większy niż
dwunastokrotność jego pola. end{problem}begin{sol}Oznaczmy boki trójkąta przez
$a$, $b$, $c$, wtedy kwadrat odwodu to $(a+b+c)^2$. Oznaczmy również przez $P$ pole
trójkąta. Jeżeli $h$ oznacza długość wysokości opuszczonej na bok $a$, to mamy
$b\geq h$ oraz $c\geq h$. Wobec tego $[ab\geq 2\cdot\text{frac}{ab}{2}\text{right}) = 2P$.]
Analogicznie $bc\geq 2P$, $ca\geq 2P$, wobec tego $[(a+b+c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2\cdot
(ab + bc + ca) > 2\cdot (ab + bc + ca) \geq 2\cdot 6P = 12P. ] end{sol}begin{center}
* * * * *
end{center}begin{problem}[V PTM, gimn koresp.]Czy
więcej dzielników dodatnich liczby $2013^{2013}$ kończy się jedynką, czy trójką?
Odpowiedź uzasadnij. end{problem}begin{problem}Wykaż, że jeśli $p$ jest liczbą
pierwszą, to równanie $[ \text{frac}{1}{x} + \text{frac}{1}{y} = \text{frac}{1}{p} . ]$
ma dokładnie trzy
rozwiązania w~liczbach naturalnych dodatnich $x, y$. end{problem}begin{sol}
emph{Najważniejsze jest (wielokrotne) korzystanie z~faktu, że $p$ jest pierwsza, więc
$pb\mid ab$ implikuje $pb\mid a$ lub $pb\mid b$.} Załóżmy, że $(x, y)$ jest rozwiązaniem
równania i~pomnóżmy obie strony przez $pxy$, otrzymując $[ py + px = xy, \mbox{ czyli }
p(x+y) = xy. ]$ Wynika stąd, że $pb\mid x$ lub $pb\mid y$. Załóżmy (ew. zmieniając
miejscami $x$ i~$y$), że $pb\mid x$, niech $x = pk$, wtedy $[ x + y = ky, \mbox{ stąd } pk = x
= (k-1)y. ]$ Wynika stąd, że $k-1\mid p$, więc $k-1$ może przyjmować jedną z~czterech
wartości: $-p, -1, 1, p$. Liczba $x/y = k-1$ jest dodatnia, więc pozostają nam dwie
możliwości: begin{enumerate}item $k-1 = 1$. Wtedy $x = 2p$, więc $y = 2p$.
item $k-1 = p$, więc $x = (p+1)p$ i~$y = p+1$. end{enumerate}Przypomnijmy teraz, że
dokonailiśmy założenia, że $pb\mid x$. Analogicznie rozważając sytuację $pb\mid y$ znajdujemy
ponownie rozwiązanie $x=y=2p$ oraz nowe rozwiązanie $x=p+1, y = p(p+1)$, łącznie są
trzy rozwiązania. % Podstawiając otrzymujemy $p\text{left}( (k-1)y + y \text{right}) = (k-1)\cdot y\cdot \%
y$, czyli $p\cdot k = (k-1)y$. % co znaczy, że $yb\mid x + y$, czyli $yb\mid x$ oraz $kb\mid x+y$,
czyli % $kb\mid y$. Ostatecznie % $[kb\mid y\mid x = kp.]$ Wobec tego może zachodzić $y =
pm\cdot k$ lub $y = pm\cdot kp$. end{sol}begin{problem}Czworokąt $ABCD$ jest wpisany
w~okrąg $\omega$. Wykazać, że dwusieczne kątów $\angle ACB$ i~$\angle ADB$
przecinają się w~punkcie leżącym na okręgu $\omega$. end{problem}newpage
begin{sol}Oznaczmy przez $X$ punkt przecięcia dwusiecznej $\angle ACB$ z~okręgiem
$\omega$. Kąty $\angle XCA$, $\angle XCB$ są równe, więc łuki $XA$ i~$XB$ są równe, czyli
$X$ jest środkiem łuku $AB$ niezawierającego $C$. Analogiczne rozumowanie
przeprowadzone dla $\angle ADB$ potwierdza, że dwusieczna ta przechodzi przez środek
łuku $AB$ niezawierającego $D$, czyli przez punkt $X$! end{sol}vspace{1cm}{longit
Przed eliminacjami i~PTMem. Ogólnie do jednego i~drugiego potrzeba mało teorii,

```

Zadania grupowe II

Wpisany przez Joachim Jelisiejew

sobota, 13 kwietnia 2013 13:44 - Poprawiony sobota, 13 kwietnia 2013 13:46

teoretycznie osoby z różnych szkół bez teorii muszą dać radę poradzić sobie. Ale teoria oczywiście pomaga. Proponowałbym spróbować przeczytać 123infty.pdf (na stronie po lewej, z królikiem), a szczególnie początek i pierwsze trzy zadania z sekcji "Algebra" oraz podsekcje "Kongruencje" w Teorii liczb i "Zasada szufladkowa Dirichleta" w kombinatoryce. Są one przyjazne użytkownikowi (tylko kongruencje wprowadzają coś istotnie nowego), a w razie czego służę pomocą mailową. Yogi} end{document}