Kółko 23.04 - Trochę zespolonych

Ściągawka z teorii

1. *Liczba zespolona* to liczba postaci
$$z = a + b\,\mathrm{i}$$
gdzie a, b rzeczywiste, a i to jednostka urojona, spełniająca $\mathrm{i}^2 = -1$. Liczbę a nazywamy *częścią rzeczywistą* z i oznaczamy $\operatorname{Re} z$, liczbę b nazywamy *częścią urojoną* z i oznaczamy $\operatorname{Im} z$ (oznaczenia od ang. Real and Imaginary).

2. Mówimy, że liczba zespolona jest *rzeczywista*, jeżeli $b = 0$ a *czysta*, albo *urojona*, jeśli $a = 0$.

3. Liczby zespolone możemy określić działania:
$$(a + b\,\mathrm{i}) + (c + d\,\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i}$$
$$-(a + b\,\mathrm{i}) = -a - b\,\mathrm{i}$$
$$(a + b\,\mathrm{i})(c + d\,\mathrm{i}) = ac + ad\,\mathrm{i} + bc\,\mathrm{i} + bd\,\mathrm{i}^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\,\mathrm{i}$$
$$1/a + b\,\mathrm{i} = \frac{a - b\,\mathrm{i}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,\mathrm{i}$$
Mnożenie jest przemienne i w ogóle wszystko jest normalne :P

4. Dla $z = a + b\,\mathrm{i}$ liczbę
$$a - b\,\mathrm{i}$$
nazywamy *sprzężeniem* z i oznaczamy $\overline{z}$. Jest
$$\overline{a \pm b} = \overline{a} \pm \overline{b}, \quad \overline{ab} = \overline{a}\overline{b}, \quad \overline{1/a} = 1/\overline{a}$$

5. Liczbę rzeczywistą (!) $\sqrt{a^2 + b^2}$ nazywamy *modułem* liczby z i oznaczamy $|z|$ (jest to odpowiednik wartości bezwzględnej), liczba $\overline{z}$ ma taki sam moduł: $a^2 + b^2 = a^2 + (-b)^2$. Ponadto zachodzi
$$z\overline{z} = |z|^2$$

6. Oczywiście $a + b\,\mathrm{i} = c + d\,\mathrm{i}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ i $b = d$.

7. (Interpretacja geometryczna) Liczbę zespoloną $a + b\,\mathrm{i}$ możemy utożsamiać z punktem płaszczyzny (a, b), łatwo wtedy widać, że $|z|$ jest odległością od 0 tej liczby. Niech α będzie kątem pomiędzy osią OX o prostą przechodzącą przez $(0, 0)$ i (x, y). Wtedy
$$z = |z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$$

Zespolone w geometrii

1. Udowodnij, że $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

2. Znaleźć wszystkie liczby zespolone z takie, że $z = \overline{z}$ i wszystkie takie, że $z = -\overline{z}$.

3. Stwierdzić, jaką figurę opisuje równanie $|z - r| = s$, dla r, s ustalonych, s rzeczywistego dodatniego.

4. Zinterpretować pomnożenie 2 liczb o module 1 wykorzystując interpretację geometryczną liczb zespolonych.

5. * Udowodnić, że gdy różne liczby zespolone u, v, w, z potraktować jako punkty płaszczyzny, to odcinki u, v i w, z są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(u-v):(w-z) \text{ jest rzeczywiste}$$

a prostopadłe wtedy tylko wtedy, gdy

$$(u-v):(w-z) \text{ jest urojone}$$

6. Stosując poprzednie zadanie wywieść warunki na to, że różne liczby u, v, w są współliniowe (jako punkty płaszczyzny).

7. Rozłóż wielomian z poprzedniego koła (x^4+1) na czynniki stopnia 1, a następnie na czynniki rzeczywiste stopnia 2.