IV zadanie domowe. Rozwiązanie

kółko ILO Białystok
na 17 stycznia

Zadanie 1

Czwórka do brydża to cztery osoby *z których każda chce grać z każdą inną z czwórki.*

Okazało się, że w gronie 20 osób nie udało się znaleźć czwórki do brydża, wobec czego Yogi, zniechęcony, powiedział "Na pewno za to znajdą się cztery osoby, z których żadna nie chce grać z żadną inną".

Udowodnij, że Yogi miał rację.

Rozwiązanie.

Osoby, które chcą ze sobą grać nazwiemy *połączonymi*, osoby, które nie chcą — *niepołączonymi*. Zbiór r osób parami połączonymi nazwiemy r*-kliką*, a zbiór s osób parami niepołączonych nazwiemy s*-antykliką*.

Niech $R(r, s)$ będzie najmniejszą liczbą osób taką, że w każdym zbiorze $R(r, s)$ osób wystąpi r-klika lub s-antyklika. Chcemy udowodnić, że $R(4, 4) \leqslant 20$.

Zauważmy na początek, że $R(2, s) = s$ dla każdego $s \geqslant 2$. Wynika to z dwóch obserwacji:

1. Jeżeli mamy $s-1$ osób, z których żadne nie są połączone, to nie mamy 2-kliki, ani s-antykliki, więc $R(2, s) \geqslant s$.

2. Jeżeli weźmiemy s osób to albo pewne dwie z nich są połączone (więc tworzą 2-klikę) albo wszystkie osoby są niepołączone, więc tworzą s-klikę. Stąd $R(2, s) \leqslant s$.

Analogicznie dowodzimy $R(s, 2) = s$ (*lub ogólniej* $R(r, s) = R(s, r)$).

Chcemy teraz udowodnić, że $R(r, s) \leqslant R(r-1, s) + R(r, s-1)$.

Niech $R := R(r-1, s) + R(r, s-1)$. Rozważmy dowolny zbiór R osób i dowolną osobę α. Chcemy pokazać, że istnieje w tym (dowolnie wybranym!) zbiorze r-klika lub s-antyklika, co z definicji $R(r, s)$ pokaże $R \geqslant R(r, s)$, czyli $R(r, s) \leqslant R(r-1, s) + R(r, s-1)$.

Załóżmy, że α jest połączona z d osobami. Wtedy α jest niepołączona z $R-1-d$ osobami.

Chcemy pokazać, że $d \geqslant R(r-1, s)$ lub $R-1-d \geqslant R(r, s-1)$. Zaiste, gdyby żadna z tych nierówności nie zaszła, to $d \leqslant R(r-1, s) - 1$ oraz $R-1-d \leqslant R(r, s-1) - 1$, stąd $R-1 = (R-1-d) + d \leqslant R(r-1, s) - 1 + R(r, s-1) - 1 = R-2$, sprzeczność.

Rozważmy dwa przypadki

1. $d \geqslant R(r-1, s)$.
   Niech $\mathcal{D}$ oznacza zbiór osób połączonych z α. Skoro $|\mathcal{D}| \geqslant R(r-1, s)$ to w $\mathcal{D}$ istnieje $r-1$-klika lub s-antyklika. Wobec tego w $\mathcal{D} \cup \{\alpha\}$ istnieje r-klika (bo wszystkie elementy $\mathcal{D}$ są połączone z α lub s-antyklika, co dowodzi naszej tezy.

2. $R-1-d \geqslant R(r, s-1)$.
   Niech $\mathcal{ND}$ oznacza zbiór osób niepołączonych z α, wtedy w $\mathcal{ND}$ istnieje r-klika lub $s-1$-antyklika, więc w $\{\alpha\} \cup \mathcal{ND}$ istnieje r-klika lub s-antyklika.

Teraz oszacowujemy:

$$R(3,3) \leqslant R(3,2) + R(2,3) = 6 \quad R(4,3) \leqslant R(4,2) + R(3,3) = 10$$
$$R(3,4) \leqslant R(2,4) + R(3,3) = 10 \quad R(4,4) \leqslant R(4,3) + R(3,4) = 20.$$

Liczby $R(r, s)$ *nazywają się* liczbami Ramseya. *Dokładna wartość* $R(4, 4)$ *to* 18.