Pisemne II

Joachim Jelisiejew

na 20 grudnia 2011

Podobnież 20 jeszcze jest normalnie i kółko może być.

Zadanie jest znane, proszę: nie korzystajcie z rozwiązania z internetu. Gdybyście mimo wskazówek mieli problemy z rozwiązaniem napiszcie — dam jakieś dodatkowe podpowiedzi. Do osób z kółka: niestety musicie udowodnić wszystko, co było powiedziane na kółku a nie jest dostępne w jakichś źródłach.

Zadanie 2

Niech c będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Ciąg (a_n) jest określony przez warunki

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = d(a_n) + c \text{ dla } n = 1, 2, \ldots.$$

gdzie $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby m. Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia k, że ciąg $a_k, a_{k+1}, \ldots$. jest okresowy.

Rozwiązanie.

- Uzasadnij, że $d(n) \leqslant n/2$ jeżeli n dostatecznie duże.
  - wzór $d(n) = \prod(a_i + 1)$,
  - $p^a \geqslant a + 1$ gdzie $p \geqslant 2$,
  - $p^a < 2(a + 1)$ tylko dla skończenie wielu $p \geqslant 2$ i $a \geqslant 0$.
- Dla dostatecznie dużego n zachodzi $d(n) + c < n \implies a_n$ jest ograniczony.