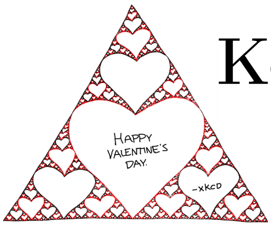

Kółko przed olimpiadą,

czyli byle do wiosny!

kółko I LO Białystok
14 lutego 2013

Zadanie 1
Na herbatce na II etapie OMa jest n dziewcząt i n chłopców. Każda dziewczyna lubi r chłopców, a każdy chłopiec lubi s dziewcząt. Wykaż, że jeżeli $r + s > n$, to istnieje para, która lubi się nawzajem, a jeżeli $r + s \leqslant n$ to może być tak, że każde uczucie jest nieodwzajemnione.

Zadanie 2
Dane są liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takie, że $a_i \in \{1, -1\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0.$$

Udowodnij, że n jest podzielne przez 4.

Zadanie 3
Liczby dodatnie a, b, c spełniają $abc = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant a + b + c.$$

Wskazówka: dla liczb o iloczynie równym 1 mamy jedno miłe podstawienie.

Zadanie 4 dla Damiana
W trójkąt ABC wpisano okrąg, tak, że jest on styczny do boku AB w punkcie D. Wykaż, że okręgi wpisane w trójkąty ADC i BDC mają punkt wspólny.

Zadanie 5
Wykazać, że jeżeli $a > 3$ jest liczbą całkowitą nieparzystą, to dla dowolnej liczby naturalnej n, liczba

$$a^{2^n} - 1$$

ma co przynajmniej $n + 1$ różnych dzielników pierwszych.

Zadanie 6
Wykaż, że każde dwie spośród liczb

$$2^{2^0} + 1, 2^{2^1} + 1, 2^{2^2} + 1, \ldots, 2^{2^n} + 1, \ldots$$

są względnie pierwsze.

Zadanie 7 dodatkowe
Wielomian $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ ma współczynniki leżące w przedziale $[-1, 1]$. Udowodnij, że nie ma on pierwiastków zawartych w przedziale $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.