Okazja!

Rozwiąż, ile zdołasz za jedyne $60min$.

kółko I LO Białystok
15 stycznia 2012

Zadanie 1

1. Wyznacz wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że
$$f(y)f(x) - xy = f(x) + f(y) - 1$$
dla wszystkich x, y rzeczywistych.
2. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie
$$f(x + y) = f(f(x)) + y + 1.$$

Zadanie 2

W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary. Wykaż, że symetralna odcinka EA, symetralna odcinka BC i dwusieczna kąta CDE przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 3

Rozwiąż w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań
$$\begin{cases} x^2 - (y + z + yz)x + (y + z)yz = 0 \\ y^2 - (z + x + zx)y + (z + x)zx = 0 \\ z^2 - (x + y + xy)z + (x + y)xy = 0. \end{cases}$$

Uwaga: propozycja na za tydzień to `http://matma.ilo.pl/images/lemaciki6092011.pdf`*, w ramach przypomnienia geo.*

Okazja!

Zadania doliczone.

kółko I LO Białystok
15 stycznia 2012

Zadanie 4

Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których
$$n^n + 1 \quad \text{oraz} \quad (2n)^{2n} + 1$$
są liczbami pierwszymi.

Zadanie 5

Czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB \neq CD$, jest wpisany w okrąg. Czworokąty $AKDL$ i $CMBL$ są rombami o bokach długości a. Dowieść, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

Zadanie 6

Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x), P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.