Kongruencje – 14.05.09

Zad.1 Wyznaczyć x, y:

$$2^{75} \equiv x \ (mod\ 17)$$
$$3^{19} \equiv y \ (mod\ 13)$$

Zad.2 Dowieść, że $24 \mid p^2 - 1$, gdzie p jest liczbą pierwszą taką, że $p > 3$.

Zad.3 Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2 + 5n + 1$ nie jest podzielna przez 49.

Zad.4 Udowodnić cechę podzielności przez 9 i 11.

Zad.5 Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczby:

a) $2p + 1$ i $4p + 1$;
b) $4p^2 + 1$ i $6p^2 + 1$

są również pierwsze.

Zad.6 Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite m, dla których liczba $m^4 + m^2 - 2$ jest podzielna przez 9.

Zad.7 Znaleźć wszystkie takie $n \in N_+$, że $5 \nmid n$ i $n^4 + 4^n$ jest liczbą pierwszą.

Zad.8 Wyznaczyć wszystkie $n \in N_+$ takie, że $1 + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 0 \ (mod\ 5)$.

Zad.9 Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$x^2 - 3y^2 = 17.$$

Zad.10 Udowodnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą nieujemną, to $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$.

Zad.11 Udowodnij, że liczba $3^n + 2 \cdot 17^n$ nie jest kwadratem liczby naturalnej dla każdego $n \in N$.