Nierówności wynikające ze średnich

Teoria

1. Nierówności między średnimi dla dwóch liczb: Jeśli $a, b > 0$, to

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

2. Ważne nierówności wynikające ze średnich (dla $a, b > 0$):

   (a) $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

   (b) $a+1 \geq 2\sqrt{a}$

   (c) $a+\frac{1}{4} \geq \sqrt{a}$

   (d) $a+\frac{1}{a} \geq 2$

   (e) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

   (f) $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \geq 4ab$

   (g) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} \geq \frac{4}{a+b}$

3. Nierówności między średnimi dla większej ilości liczb: Jeżeli liczby $a_1, a_2 \cdots, a_n$ są dodatnie, to

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

Zadania

1. Udowodnić, że jeżeli a, b są liczbami dodatnimi takimi, że $a+b=1$, to zachodzi nierówność:

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}$$

2. Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych liczb a, b zachodzi nierówność:

$$(a+b)^4 \geq 8ab(a^2+b^2)$$

3. Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych liczb a, b, c zachodzi nierówność:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

4. Udowodnić, że dla $a, b \in \mathbb{R}$ jest

$$4b^2+a^2 \geq 4ab$$

5. Wykazać, że dla dodatnich liczb a, b, takich, że $ab=4$, prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{(a+1)^3}{b+1}+\frac{(b+1)^3}{a+1} \geq 18$$

6. Udowodnić, że jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi spełniającymi warunek $abc(a+b+c)=1$, to prawdziwa jest nierówność:

$$(a+b)(a+c) \geq 2$$

7. Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$$

8. Wykazać, że dla nieujemnych a, b, c prawdziwa jest nierówność:

$$2\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right) \leq 3\left(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}\right)$$

9. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

   (a)
   $$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

   (b)
   $$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

10. Wykazać, że dla $a, b \in \langle 0; 1 \rangle$ prawdziwa jest nierówność:

$$ab(1-a)(1-b) \leq \frac{1}{16}$$