Olomiany

1.1 Teoria.

Jeżeli nie powiedziano inaczej "wielomian" znaczy "wielomian o współczynnikach rzeczywistych."

1. **Definicja** Stopniem *wielomianu* $W(x) = a_0 + a_1 \cdot x + ... + a_n \cdot x^n$ *(gdzie* $a_n \neq 0$*) nazywamy* n *i oznaczamy to* $\deg W(x) = n$. *Przyjmujemy, że stopień wielomianu* $W(x) = 0$ *wynosi* $-\infty$.

   Przy takich konwencjach zachodzi

   $$\deg(U \cdot V) = \deg V + \deg U \text{ oraz } \deg(U+V) \leqslant \max(\deg U, \deg V).$$

   Mówimy, że deg zadaje gradację.

2. **Twierdzenie (Interpolacja Lagrange'a)** *Niech* $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ *będą parami różne oraz niech* $y_1, ..., y_{n+1}$ *będą rzeczywiste. Wtedy wśród wielomianów stopnia* n *(o jeden mniej niż punktów!) lub mniejszego istnieje dokładnie jeden wielomian* $W(x)$ *spełniający* $W(x_i) = y_i$ *dla* $i = 1, 2, ..., n+1$.

3. **Twierdzenie (Bezout)** *Dla każdego* x_0 *i każdego wielomianu* $W(x)$ *zachodzi* $W(x) = (x - x_0)P(x) + W(x_0)$, *gdzie* $P(x)$ *jest wielomianem, który jest* ***różny dla różnych*** x_0. *Ponadto jeżeli* $W(x)$ *miało współczynniki całkowite i* x_0 *jest całkowite, to* $P(x)$ *ma współczynniki całkowite.*

4. Warto pamiętać, że wielomian to jednocześnie funkcja i że obie te rzeczy wyznaczają się wzajemnie.

1.2 Teoria II

1. **Twierdzenie (Zasadnicze twierdzenie algebry, w rzeczywistych)** *Każdy wielomian* W *o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.*

2. **Twierdzenie (Zasadnicze twierdzenie algebry, zespolone)** *Każdy wielomian* W *o współczynnikach zespolonych można rozłożyć na iloczyn wielomianów liniowych o współczynnikach zespolonych.*

3. **Twierdzenie (wzory Viète'a)** *Niech* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *będą pierwiastkami wielomianu*

   $$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \ a_n \neq 0$$

   o współczynnikach zespolonych (w szczególności także rzeczywistych). Wówczas prawdziwe są wzory:

   $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

   Ponieważ na olimpiadzie brak liczb zespolonych, wzorów Viète'a używa się, jeżeli w zadaniu jest wprost powiedziane, że wielomian (stopnia n) ma n pierwiastków (rzeczywistych).

4. **Twierdzenie (O wielomianach symetrycznych)** *Jeżeli wielomian* W, *być może wielu zmiennych* $x_1, \ldots, x_n$, *jest symetryczny, to jest on sumą iloczynów wielomianów* $1, x_1 + x_2 + \ldots x_n, x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \ldots, x_1^n + x_2^n + \ldots x_n^n$.

1.3 Zadanka.

1. Wyznaczyć a, b tak, aby wielomian $x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$ był kwadratem innego wielomianu.

2. Wypisz explicite tj. jawnie rozkład wielomianu $x^4 + 1$ na wielomiany drugiego stopnia, wynikający z zasadniczego twierdzenia algebry.

3. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste a, b, dla których wielomiany $f(x) = x^5 + ax^3 + x^2 + 1$ i $g(x) = x^4 + ax^2 + x + b$ mają wspólny pierwiastek (wypisać równanie na a w zależności od b).

4. Wielomian P nie jest stały, a Q, R są takie, że $Q(P(x)) = R(P(x)))$ dla wszystkich x. Uzasadnić, że $Q = R$.

1.4 Zadania.

1. Czy twierdzenie interpolacyjne Lagrange'a pozostanie prawdziwe, jeżeli zamienimy w "wielomian" na "wielomian o współczynnikach całkowitych" oraz założymy, że liczby x_i, y_i są całkowite?

2. Czy zasadnicze twierdzenie algebry pozostanie w mocy, jeżeli zamiast "wielomian" wstawić w nim "wielomian o współczynnikach całkowitych"?

3. Wielomian o współczynnikach rzeczywistych $x^n + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_0$ ma n pierwiastków rzeczywistych. Oblicz jego współczynniki.

4. Wielomian $P(x)$ stopnia n, o współczynnikach rzeczywistych, dla dowolnej liczby $k = 0, 1, ..., n$ spełnia równość $P(k) = \frac{k}{k+1}$. Obliczyć $P(n+1)$.

   Czy założenie, że wielomian P jest stopnia n jest potrzebne?

5. Dana jest liczba naturalna $k \geqslant 2$ oraz liczby całkowite $a_1, \ldots, a_n$ spełniające warunki

   $$a_1 + a_2 2^i + a_3 3^i + \ldots a_n n^i = 0 \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

   Dowieść, że liczba $a_1 + a_2 2^k + \ldots + a_n n^k$ jest podzielna przez $k!$.

1.5 Wielomiany o współczynnikach całkowitych

1. Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że jeżeli dla co najmniej 6 różnych liczb całkowitych przyjmuje on wartość 2007, to $P(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

2. Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych stopnia większego niż 1 mający wszystkie wartości (dla argumentów całkowitych) będące liczbami złożonymi (czyli liczbami całkowitymi dodatnimi, nie będącymi pierwszymi i nie będącymi jedynką)?

3. Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych stopnia większego niż 1 mający wszystkie wartości (dla argumentów całkowitych) będące liczbami pierwszymi?

1.6 Zady

1. Udowodnić, że każdy wielomian jest sumą trzecich potęg wielomianów.

2. Niech F, G, H będą wielomianami stopnia co najwyżej $2n + 1$ o współczynnikach rzeczywistych, takimi, że

   (a) dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jest $F(x) \leqslant G(x) \leqslant H(x)$,

   (b) istnieją takie parami różne $x_1, ..., x_n$, że $F(x_i) = H(x_i)$ dla $i = 1, 2, ..., n$,

   (c) istnieje takie x_0 różne od $x_1, ..., x_n$, że $F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0)$.

   Udowodnić, że $2G(x) \equiv F(x) + H(x)$.

3. Dane są takie niezerowe liczby całkowite a, b, c, że $a+b+c=0$. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwa jest podzielność

$$a^2+b^2+c^2 \Big| a^{n^2+1}+b^{n^2+1}+c^{n^2+1}.$$

4. W tym zadaniu "wielomian" oznacza wielomian o współczynnikach całkowitych.

   Możemy zdefiniować relację $\bmod$ dla wielomianów przez $P \equiv Q \mod R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R \Big| P-Q$, innymi słowy

$$P-Q \in \Big\{ K \cdot R \Big| K \text{ -- wielomian } \Big\}.$$

   Relacja ta ma podobne własności jak dla liczb całkowitych. Zdefiniujmy teraz relację $P \equiv Q \mod (R_1, R_2)$ przez $P-Q \in \Big\{ K_1 \cdot R_1 + K_2 \cdot R_2 \Big| K_1, K_2 \text{ -- wielomiany } \Big\}$.

   Udowodnić, że wartość wielomianu P, o współczynnikach całkowitych, jest podzielna przez liczbę pierwszą p dla każdego argumentu całkowitego wtedy i tylko wtedy, gdy $P \equiv 0 \mod p, x^p - x$.