Kółko 13.10 - wielomiany, bardziej całkowite

Teoria.

1. **Definicja 0.1** *Stopniem wielomianu* $W(x) = a_0 + a_1 \cdot x + ... + a_n \cdot x^n$ *(gdzie* $a_n \neq 0$*) nazywamy* n *i oznaczamy to* $\deg W(x) = n$*. Przyjmujemy, że stopień wielomianu* $W(x) = 0$ *wynosi* $-\infty$*.*

2. **Twierdzenie 0.2** *Niech* $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ *będą parami różne oraz niech* $y_1, ..., y_{n+1}$ *będą rzeczywiste. Wtedy wśród wielomianów stopnia* n *lub mniejszego istnieje dokładnie jeden wielomian* $W(x)$ *spełniający* $W(x_i) = y_i$ *dla* $i = 1, 2, ..., n+1$*.*

   Dowód:
   Na początek zauważmy, że wielomian

   $$W(x) := y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_{n+1})} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_{n+1})} + \dots$$

   $$+ y_{n+1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\dots(x_{n+1}-x_n)}$$

   spełnia warunki twierdzenia (nazywany jest on *wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a*).
   Załóżmy teraz, że istnieją 2 wielomiany $W(x), V(x)$ spełniające warunki zadania. Niech

   $$P(x) := W(x) - V(x)$$

   Chcemy udowodnić, że $P(x) \equiv 0$. Zachodzi

   $$P(x_i) = 0 \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n+1$$

   więc, z tw. Bezout, mamy

   $$P(x) = Q(x)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n+1})$$

   ale wielomian $P(x)$ ma stopień co najwyżej n, a wielomian $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n+1})$ ma stopień $n+1$, więc $Q(x) \equiv 0$, a stąd wynika $P(x) \equiv 0$, co kończy dowód.

3. **Twierdzenie 0.3** *Jeżeli* $W(x)$ *ma współczynniki całkowite i* a, b *są całkowite (*$a \neq b$*), to* $a - b | W(a) - W(b)$*.*

4. **Twierdzenie 0.4 (Bezout)** *Dla każdego* x_0 *i każdego wielomianu* $W(x)$ *zachodzi* $W(x) = (x - x_0)P(x) + W(x_0)$*, gdzie* $P(x)$ *jest wielomianem, który jest* ***różny dla różnych*** x_0*. Ponadto jeżeli* $W(x)$ *miało współczynniki całkowite i* x_0 *jest całkowite, to* $P(x)$ *ma współczynniki całkowite.*

5. **0.5** *Wzory Viete chwilowo nie będą nam potrzebne, więc ich nie podaję :)*

Zadania.

1. Wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych spełnia $9|W(223)$ i $223|W(9)$. Jaka jest reszta z dzielenia $W(232)$ przez 2007? (źródło - Staszic)
   Rozwiązanie:
   Jest (patrz teoria)

   $$232 - 223 | W(232) - W(223) \text{ oraz } 9 | W(223) \text{ stąd } 9 | W(232) - W(223) + W(223) = W(232)$$

   $$232 - 9 | W(232) - W(9) \text{ oraz } 9223 | W(9) \text{ stąd } 223 | W(232) - W(9) + W(9) = W(232)$$

   Skoro $232, 9$ są względnie pierwsze i $2007 = 223 \cdot 9$, to stąd już wynika, że $2007 | W(232)$, a więc $W(232)$ daje resztę 0.

2. Wykaż, że dla dowolnego wielomianu $W(x)$ mającego pierwiastek x_0 można znaleźć takie c, że dla każdego k jest $2^k | W(2^k - c)$.
Rozwiązanie:
Mamy dla dowolnej liczby naturalnej n:

$$n | W(n + x_0) - W(x_0) = W(n + x_0)$$

W szczególności jeżeli weźmiemy $c := -x_0$, to $n | W(n - c)$, a stąd w jeszcze większej szczególności $2^k | W(2^k - c)$.

3. Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych stopnia większego niż 1 mający wszystkie wartości (dla argumentów całkowitych) będące liczbami złożonymi (czyli liczbami całkowitymi dodatnimi, nie będącymi pierwszymi i nie będącymi jedynką)? (źródło - Staszic)
Rozwiązanie:
Tak, przykładem takiego wielomianu jest wielomian $4(x^2 + 1)$.

4. Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych stopnia większego niż 1 mający wszystkie wartości (dla argumentów całkowitych) będące liczbami pierwszymi? (źródło - Staszic)
Rozwiązanie:
Udowodnimy, że taki wielomian nie istnieje.
Załóżmy, że wielomian $W(x)$ spełnia własność z treści zadania. Niech $p = W(0)$.

$$\text{Mamy } kp | W(kp) - W(0) \text{ dla wszystkich } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{więc } p | W(kp) \text{ dla wszystkich } k \in \mathbb{Z}$$

Ale $W(kp)$ jest liczbą pierwszą, więc jeżeli jest ona podzielna przez $p > 1$, to jest równa p:

$$W(kp) = p \text{ dla wszystkich } k \in \mathbb{Z}$$

Wielomian $W(x)$ przyjmuje w nieskończenie wielu punktach taką wartość jak $V(x) = p$, więc wielomiany te są równe.
Bardziej formalnie: załóżmy, że $n = \deg W$. Wielomian $W(x)$ jest jedynym wielomianem stopnia $\leq n$, który przyjmuje wartość p w punktach $0, p, 2p, \ldots, np$. Ale $V(x) = p$ też jest takim wielomianem, więc $W(x) = V(x) = p$.
Wielomian W jest więc stały, co przeczy założeniom zadania.
Odpowiedź: Taki wielomian nie istnieje.

5. Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że jeżeli dla co najmniej 6 różnych liczb całkowitych przyjmuje on wartość 2007, to $P(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych. (źródło - Staszic)
Rozwiązanie:
Rozważmy wielomian

$$Q(x) = P(x) - 2007$$

Wielomian $Q(x)$ ma, zgodnie z założeniami zadania, przynajmniej 6 różnych pierwiastków $x_1, x_2, \ldots, x_6$, chcemy zaś udowodnić, że nie przyjmuje on wartości 2007.
Zgodnie z tw Bezout, jest

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)(x - x_6)R(x)$$

gdzie $R(x)$ ma współczynniki całkowite.
Rozkład na czynniki pierwsze 2007 to $3^2 \cdot 223$. Załóżmy, że dla pewnego X jest $Q(X) = 2007$. Wtedy

$$(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)(X - x_5)(X - x_6) | 2007$$

Co najwyżej 1 z tych czynników może się dzielić przez 223 i co najwyżej 2 mogą się dzielić przez 3. Aż 3 czynniki muszą więc być równe ± 1, co jest niemożliwe, gdyż czynniki są parami różne. Sprzeczność.

6. Wielomian $P(x)$, stopnia co najwyżej $n > 2$, o współczynnikach rzeczywistych dla dowolnej liczby $k = 0, 1, ..., n$ spełnia równość $P(k) = \frac{k}{k+1}$. Obliczyć $P(n+1)$. (źródło - Zwardoń)
Rozwiązanie:
Niech $Q(x) = P(x) \cdot (x+1) - x$. Z założeń zadania wynika, że $\deg Q \leq n+1$ oraz, że

$$Q(k) = 0 \text{ dla } k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Jest więc, z tw Bezout

$$Q(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)R(x)$$

ponieważ $n+1 = \deg\ x(x-1)(x-2)\ldots(x-n) \geq \deg Q$, to $R(x)$ jest wielomianem stałym. Ponadto $Q(-1) = P(-1) \cdot 0 - (-1) = 1$, a stąd obliczam

$$R(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$Q(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$$

Pozostaje policzyć

$$Q(n+1) = (-1)^{n+1}$$

$$P(n+1) \cdot (n+1) - n = (-1)^{n+1}$$

$$P(n+1) = \frac{n + (-1)^{n+1}}{n+1}$$

7. Niech $P(x)$ i $Q(x)$ będą wielomianami n-tego stopnia i niech $x_1, ..., x_{n+1}$ będą parami różne. Dowieść, że jeśli $P(x_i) = Q(x_i)$ dla $i = 1, 2, ..., n+1$, to $P(x) \equiv Q(x)$ (są one identyczne). (źródło - dowód 2.)
Rozwiązanie:
Dowód powyżej (w teorii).

8. (*) Niech F, G, H będą wielomianami stopnia co najwyżej $2n+1$ o współczynnikach rzeczywistych, takimi, że
   (a) dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jest $F(x) \leq G(x) \leq H(x)$,
   (b) istnieją takie parami różne $x_1, ..., x_n$, że $F(x_i) = H(x_i)$ dla $i = 1, 2, ..., n$,
   (c) istnieje takie x_0 różne od $x_1, ..., x_n$, że $F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0)$.

   Udowodnić, że $2G(x) \equiv F(x) + H(x)$. (źródło - BW)
   Rozwiązanie:

Definicja 0.6 *Jeżeli $W(x)$ jest podzielne przez $(x-a)^k$, ale nie jest podzielne przez $(x-a)^{k+1}$, to mówimy, że a jest k-krotnym pierwiastkiem $W(x)$.*

Lemat 0.7 *Jeżeli $W(x)$ jest stale nieujemny, to wszystkie jego pierwiastki są parzystej krotności.*

Dowód lematu: Korzysta z pojęcia ciągłości funkcji wielomianowej.
Rozwiązanie:
Rozważmy wielomiany

$$W(x) := H(x) - G(x), V(x) := G(x) - F(x)$$

są one stale dodatnie, ponadto w punktach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ przyjmują wartość 0, więc z tw. Bezout i z lematu wynika:

$$W(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_n)^2R(x)$$

wielomian $R(x)$ jest stopnia co najwyżej $(2n+1) - 2 \cdot n = 1$. Ale gdyby R było stopnia 1, to $W(x)$ miałby pierwiastek nieparzystej krotności, co jest niemożliwe. A więc $R(x)$ jest stałą i $W(x)$ ma postać

$$W(x) = \alpha(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_n)^2$$

Analogicznie

$$V(x) = \beta(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2$$

ponadto $W(x_0) = V(x_0) \neq 0$, a więc $\alpha = \beta$ i $W(x) \equiv V(x)$, czyli

$$H(x) - G(x) \equiv G(x) - F(x) \text{ a więc } 2G(x) \equiv F(x) + H(x)$$