Kółko 13.10 - wielomiany, bardziej całkowite

Teoria.

1. **Definicja 0.1** *Stopniem wielomianu* $W(x) = a_0 + a_1 \cdot x + ... + a_n \cdot x^n$ *(gdzie* $a_n \neq 0$*) nazywamy* n *i oznaczamy to* $\deg W(x) = n$*. Przyjmujemy, że stopień wielomianu* $W(x) = 0$ *wynosi* $-\infty$*.*

2. **Twierdzenie 0.2** *Niech* $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ *będą parami różne oraz niech* $y_1, ..., y_{n+1}$ *będą rzeczywiste. Wtedy wśród wielomianów stopnia* n *lub mniejszego istnieje dokładnie jeden wielomian* $W(x)$ *spełniający* $W(x_i) = y_i$ *dla* $i = 1, 2, ..., n+1$*.*

3. **Twierdzenie 0.3** *Jeżeli* $W(x)$ *ma współczynniki całkowite i* a, b *są całkowite (*$a \neq b$*), to* $a - b | W(a) - W(b)$*.*

4. **Twierdzenie 0.4 (Bezout)** *Dla każdego* x_0 *i każdego wielomianu* $W(x)$ *zachodzi* $W(x) = (x - x_0)P(x) + W(x_0)$*, gdzie* $P(x)$ *jest wielomianem, który jest* ***różny dla różnych*** x_0*. Ponadto jeżeli* $W(x)$ *miało współczynniki całkowite i* x_0 *jest całkowite, to* $P(x)$ *ma współczynniki całkowite.*

5. **0.5** *Wzory Viete chwilowo nie będą nam potrzebne, więc ich nie podaję :)*

Zadania.

1. Wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych spełnia $9|W(223)$ i $223|W(9)$. Jaka jest reszta z dzielenia $W(232)$ przez 2007? (źródło - Staszic)

2. Wykaż, że dla dowolnego wielomianu $W(x)$ mającego pierwiastek x_0 można znaleźć takie c, że dla każdego k jest $2^k|W(2^k - c)$.

3. Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych stopnia większego niż 1 mający wszystkie wartości (dla argumentów całkowitych) będące liczbami złożonymi (czyli liczbami całkowitymi dodatnimi, nie będącymi pierwszymi i nie będącymi jedynką)? (źródło - Staszic)

4. Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych stopnia większego niż 1 mający wszystkie wartości (dla argumentów całkowitych) będące liczbami pierwszymi? (źródło - Staszic)

5. Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że jeżeli dla co najmniej 6 różnych liczb całkowitych przyjmuje on wartość 2007, to $P(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych. (źródło - Staszic)

6. Wielomian $P(x)$, stopnia co najwyżej $n > 2$, o współczynnikach rzeczywistych dla dowolnej liczby $k = 0, 1, ..., n$ spełnia równość $P(k) = \frac{k}{k+1}$. Obliczyć $P(n+1)$. (źródło - Zwardoń)

7. Niech $P(x)$ i $Q(x)$ będą wielomianami n-tego stopnia i niech $x_1, ..., x_{n+1}$ będą parami różne. Dowieść, że jeśli $P(x_i) = Q(x_i)$ dla $i = 1, 2, ..., n+1$, to $P(x) \equiv Q(x)$ (są one identyczne). (źródło - dowód 2.)

8. (*) Niech F, G, H będą wielomianami stopnia co najwyżej $2n+1$ o współczynnikach rzeczywistych, takimi, że

   (a) dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jest $F(x) \leq G(x) \leq H(x)$,

   (b) istnieją takie parami różne $x_1, ..., x_n$, że $F(x_i) = H(x_i)$ dla $i = 1, 2, ..., n$,

   (c) istnieje takie x_0 różne od $x_1, ..., x_n$, że $F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0)$.

   Udowodnić, że $2G(x) \equiv F(x) + H(x)$. (źródło - BW)