Eliminacje do PTM

1. Udowodnić, że jeżeli n jest liczbą całkowitą dodatnią, to

$$2|\binom{2n}{n}$$

2. Wyznaczyć ilość piątek liczb (a, b, c, d, e) liczb całkowitych dodatnich, spełniających nierówność

$$a + b + c + d + e \leq 2009$$

   Uwaga: Pomyłki numeryczne przy obliczaniu wyniku nie będą mocno karane, ale trzeba uzyskać liczbowy wynik.

3. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi

$$6abc \leq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$$

4. Niech $ABCD$ będzie trapezem, w którym $AD||BC$ i $|AB| = |CD|$, wpisanym w okrąg o. Niech M będzie środkiem boku AD, zaś E będzie punktem przecięcia prostej BM z okręgiem o, innym niż B. Udowodnić:

   (a)
$$\angle AMC = \angle AME$$

   (b)
$$\frac{|MC|}{|AM|} = \frac{|AM|}{|ME|}$$

   Uwaga: Te dwa podpunkty liczą się osobno, więc jeżeli udowodniliście poprawnie jeden, a drugiego nie, to dostaniecie 2 pkt. Trudno jest jednak udowodnić b), nie udowadniając a).