Walcz z układem! (równań)

Zadania głównie z kółka V LO w Krakowie; dziękuję!
20 grudnia 2011

Teoria

1. Układ równań to po prostu "równanie funkcyjne" spełnione dla konkretnych liczb. **Nie możemy podstawiać dowolnych liczb**, ale **możemy i musimy przekształcać: mnożyć równania przez coś, dodawać i odejmować je od siebie itp.** Zwykle układy mają pewną symetrię, która pozwala rozwiązać je sensownie.

   Jak przy funkcyjnych — bardzo pomaga wcześniejsze zgadnięcie chociaż jednego rozwiązania.

2. Układ może być *cykliczny* tzn. nie zmieniać się przy przesunięciu cyklicznym zmiennych; wtedy można założyć, że któraś ze zmiennych jest największa/najmniejsza lub **ma największą/najmniejszą wartość bezwzględną**.

3. Układ może być symetryczny np.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 2(xy+yz+zx) \\ x^3+y^3+z^3 = 0 \end{cases}$$

   wtedy, jeżeli chcemy pałować, warto podzielić przez jedną ze zmiennych i zmienić zmienne na ilorazy (poniżej $\alpha = x/z, \beta = y/z$).

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2+1 = 2(\alpha\beta+\beta+\alpha) \\ \alpha^3+\beta^3+1 = 0 \end{cases}$$

   tutaj widać, że nie opłaca się pałować.

4. **Trzeba uważać na dzielenie przez** 0**!**

5. Bardzo często **trzeba dużo liczyć** i to dokładnie — jeżeli jest 8 przypadków do rozważenia, to trzeba rozważyć je jeden po drugim i to szybko (choć **zawsze można chwilkę pomyśleć czy nie da się prościej. Ale chwilkę!**).

6. W całkowitych rozwiązuje się metodami teorii liczb!

Zadanie 1

Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x, y, z, takie, że

$$\begin{cases} x^2+y^2+z = 2 \\ y^2+z^2+x = 2 \\ z^2+x^2+y = 2. \end{cases}$$

Zadanie 2

Rozwiąż układ równań w liczbach rzeczywistych a, b, c:

$$\begin{cases} a^3+3ab^2+3ac^2-6abc = 1 \\ b^3+3bc^2+3ba^2-6abc = 1 \\ c^3+3ca^2+3cb^2-6abc = 1. \end{cases}$$

Zadanie 3

Rozwiąż w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2-(y+z+yz)x+(y+z)yz = 0 \\ y^2-(z+x+xz)y+(x+z)xz = 0 \\ z^2-(x+y+xy)z+(x+y)xy = 0. \end{cases}$$

Źródło: OM.

1.1 “Półniezmienniki”

Częste, choć na razie nie na II etapie OM, są układy postaci $y = f(x), z = f(y), x = f(z)$, gdzie f jest pewną funkcją. Zwykle podstawianie niewiele tu daje. Trzeba zgadnąć rozwiązania i pokazać pewną własność f, która sprawia, że innych nie ma. Tutaj zwykle b. ważne są nierówności i wartość bezwzględna.

Zadanie 4

Znajdź wszystkie czwórki liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d spełniające układ równań

$$\begin{cases} a = 2b^2 - 1 \\ b = 2c^2 - 1 \\ c = 2d^2 - 1 \\ d = 2a^2 - 1. \end{cases}$$

*Wskazówka: Połóż $f(x) = 2x^2 - 1$. **Narysuj wykres!** Porównaj $|f(x)|$ i $|x|$ w zależności od x.*

Zadanie 5

Liczby $x_1, \ldots, x_{2011}$ są rzeczywiste dodatnie i spełniają układ równań

$$\begin{cases} x_1^{x_2} = x_3 \\ x_2^{x_3} = x_4 \\ \ldots \\ x_{2011}^{x_1} = x_2. \end{cases}$$

Wyznacz te liczby.