



Układy...

KÓŁKO I LO BIAŁYSTOK

3 STYCZNIA 2013

Większość z poniższych układów da się rozwiązać szybko i skutecznie za pomocą nierówności. Nie zawsze tak jest; najlepiej na początku znaleźć dużo rozwiązań układu, żeby się zorientować, jakie one są. Ale jeżeli mamy mniej równań niż zmiennych, to nierówności prawie na pewno są w środku.

ZADANIE 1

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1+y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4) = 1+x^7 \end{cases}$$

w liczbach nieujemnych x, y .

ZADANIE 2 SZWECJA 1989

Rozwiąż w liczbach dodatnich układ równań

$$\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 3 \\ x^2 + y^3 + z = 3 \\ x^3 + y + z^2 = 3. \end{cases}$$

Układ jest cykliczny!

ZADANIE 3 ROSJA 1992

Znajdź wszystkie pary liczb rzeczywistych (x, y) spełniających równanie

$$x^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3}.$$

ZADANIE 4 ROSJA 1992

Znajdź wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y spełniających równanie

$$y^4 + 2x^4 + 1 = 4x^2y.$$

ZADANIE 5 ROSJA 1992

Udowodnij, że równanie $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, z .

Mamy znaleźć ∞ rozwiązań, a nie rozwiązać równanie! Nie warto szukać wszystkich rozwiązań — trzeba znaleźć szczególne.