Trikowe zadania – rozwiązania

1. Liczby całkowite dodatnie $a < b$ są takie, że

$$a|b \text{ oraz } a-1|b-1$$

Udowodnić, że $b \geq a^2$.

Dowód. Zauważmy, że

$$a|b-a \text{ oraz } a-1|b-1-(a-1)=b-a$$

skoro liczby $a, a-1$ są względnie pierwsze, to

$$a(a-1)|b-a$$

a więc $a(a-1) \leq b-a$, inaczej $a^2 \leq b$. ■

2. Niech w trójkącie $\triangle ABC$ punkt $D \in AB$ oznacza punkt styczności okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ z bokiem AB, punkt $E \in AB$ oznacza punkt styczności okręgu dopisanego do boku AB tego trójkąta z bokiem AB.

Uzasadnić, że $|AE| = |BD|$.

Dowód. Niech B_1, B_2 oraz A_1, A_2 oznaczają punkty styczności okręgu wpisanego i dopisanego do prostych CA oraz CB. Równość stycznych do okręgów implikuje

$$|CA_1| = |CB_1| \text{ oraz } |CA_2| = |CB_2|, \text{ stąd } |A_1A_2| = |CA_2| - |CA_1| = |CB_2| - |CB_1| = |B_1B_2|$$

$$|A_1A_2| = |A_1B| + |A_2B| = |DB| + |EB|$$

$$|B_1B_2| = |B_1A| + |B_2A| = |DA| + |EA|$$

$$|DB| - |EA| = |DB| - |AB| + |EB| = |A_1A_2| - |AB| =$$

$$|B_1B_2| - |AB| = -|AB| + |DA| + |EA| = |EA| - |DB| = -(|DB| - |EA|)$$

Tak więc liczba $a = |DB| - |EA|$ spełnia $a = -a$, czyli $a = 0$, $|DB| = |EA|$, czego należało dowieść.

Jedyne nietrywialne przejście tutaj to początkowa równość stycznych. Potem wystarczy uwierzyć i spróbować, że wyjście. ■

3. Dany jest siedmiokąt foremny, o kolejnych wierzchołkach A, B, C, D, E, F, G. Punkt X jest przecięciem AC i BD. Uzasadnić, że

$$|AB| + |AX| = |AD|$$

Dowód. W całym tym rozważaniu kąty są można powiedzieć zorientowane, konkretniej kąt $\angle BAC$ oznacza kąt, o który trzeba obrócić półprostą AB **lewoskrętnie**, aby przeszła ona na półprostą AC.

Rozważmy (*Vivat ulubiona metoda Stańka!*) obrót O wokół A taki, że półprosta AC przechodzi na półprostą AD. Jest to obrót o kąt $\angle CAD = 180°/7$.

Punkt X w tym obrocie przechodzi na pewien punkt X' należący do odcinka AD, ponadto $|AX| = |AX'|$.

Zauważmy, że $\angle DAE = 180°/7$ oraz $|AE| = |AD|$, tak więc obrót przenosi punkt D na E.

Niech α oznacza kąt pomiędzy prostymi XD i $X'E$. Z własności obrotów mamy równość kątów $\alpha = \angle CAD$. Z drugiej strony bezpośrednio przeliczamy, że $\angle CAD = \angle BDC$, stąd $\angle BDC = \alpha$.

Z poprzedniej równości kątów wynika, że proste CD i EX' są równoległe. Przez punkt E przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do CD – prosta BE. Tak więc $X' \in BE$, $BX'||CD$. Co więcej, proste AD i BC są równoległe, zaś punkt $X' \in AD$, więc $X'D||BC$. Z tych dwóch równoległości wynika, że $BCDX'$ jest równoległobokiem. W szczególności $|BC| = |X'D|$.

Pozostaje dodać, że $|AB| = |BC| = |X'D| = |AD| - |AX'| = |AD| - |AX|$.

Kąty skierowane mogą być nieco przerażające w powyższym rozumowaniu, niestety trzeba ich używać, żeby w sposób ścisły mówić o obrotach (dlaczego?). Tym niemniej nie należy ich demonizować i najlepiej myśleć o nich jak o zwykłych kątach "ze strzałką". ■

4. W każde pole nieskończonej szachownicy wpisano liczbę naturalną tak, że każda liczba jest średnią arytmetyczną liczb sąsiadujących z nią. Udowodnij, że wszystkie liczby są równe.

   Dowód. Obserwacja: jeżeli spełniony jest warunek z zadania, oraz wśród sąsiadujących z liczbą n liczb znajduje się liczba większa od n, to znajduje się wśród nich równiej liczba mniejsza od n.

   Dowód obserwacji: niech z liczbą n sąsiadują liczby $a_1, \dots, a_k$, przy czym $a_1 > n$. Załóżmy (dowód przez sprzeczność), że $a_1, \dots, a_k \geq n$. Wtedy

$$n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{k} \geq \frac{a_1 + (k-1)n}{k} > n$$

   sprzeczność. Obserwacja jest dowiedziona.

   Załóżmy, że nie wszystkie liczby są równe. Zauważmy, że wtedy pewne 2 liczby **sąsiednie** muszą nie być równe, a więc istnieją liczby sąsiednie $n_0 > n_1$. Z obserwacji wynika, że wśród liczb sąsiadujących z n_1 musi być liczba od niej mniejsza $n_2 < n_1$ itd.

   Doszliśmy do wniosku, że istnieje ciąg liczb napisanych, z których każda jest mniejsza od poprzedniej:

$$n_0 > n_1 > n_2 > \cdots > n_s > n_{s+1} > \dots$$

   Ale to jest nonsens! Wszystkie liczby napisane były naturalne, więc wszystkie liczby z tego nieskończonego ciągu musiałyby być liczbami ze skończonego przedziału $\{n_0, n_0 - 1, \dots, 0\}$. Sprzeczność.

   Ciekawą sprawą w tym rozwiązaniu jest jego ogólność – nie korzystaliśmy z prawie żadnych własności liczb sąsiednich. ■

5. Niech a, b, c będą bokami trójkąta. Czy z odcinków o długościach $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ da się zbudować trójkąt?

   Odpowiedź: Tak.

   Dowód. Musimy, tak naprawdę, pokazać, że liczby $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ spełniają nierówność trójkąta. Udowodnię, że

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$$

   pozostałych nierówności dowodzimy analogicznie.

   Zachodzi nierówność

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

   Istotnie, obie wymienione liczby są dodatnie, a po podniesieniu do kwadratu uzyskujemy trywialnie prawdziwą nierówność

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} > a + b = \sqrt{a+b}^2$$

   Co więcej liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, więc $a+b > c$ a więc i $\sqrt{a+b} > \sqrt{c}$.

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b} > \sqrt{c}$$

■

6. Iloczyn dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c wynosi 1. Wykaż, że

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq ab + bc + ca$$

DOWÓD. *Mógłbym oczywiście przedstawić samo rozwiązanie, ale ze względów dydaktycznych przedstawię także metodę prowadzącą do niego.*

Wiemy, że $abc = 1$. Po pierwsze zrównujemy stopnie obu stron (patrz: nierówności tzw. Kurlandczyka) uzyskując nierówność równoważną:

$$\frac{ab^2}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{bc^2}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{ca^2}{\sqrt[3]{abc}} \geq ab + bc + ca$$

Droga do rozwiązania.

Zgadujemy teraz (co nie jest takim zwykłym strzałem, jeżeli się zrobiło już dużo zadań z nierówności), że tę nierówność można udowodnić stosując średnią arytmetyczną i geometryczną (ważoną), innymi słowy nierówność:

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \geq a_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot a_n^{\alpha_n}$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$. *Ta nierówność tylko innym sposobem zapisania nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną, jeżeli liczby $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są wymierne.*

Zapisujemy pożądaną nierówność ogólnie:

$$\alpha\frac{ab^2}{\sqrt[3]{abc}} + \beta\frac{bc^2}{\sqrt[3]{abc}} + \gamma\frac{ca^2}{\sqrt[3]{abc}} \geq \left(\frac{ab^2}{\sqrt[3]{abc}}\right)^{\alpha}\left(\frac{bc^2}{\sqrt[3]{abc}}\right)^{\beta}\left(\frac{ca^2}{\sqrt[3]{abc}}\right)^{\gamma} = ab$$

gdzie $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Ostatnia równość jest naszym marzeniem i wymaganiem. Rozpisujemy ją w postaci układu równań (wynikłego z porównania wykładników przy a, b, c):

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma - 1/3 = 1 \\ \beta + 2\alpha - 1/3 = 1 \\ \gamma + 2\beta - 1/3 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $(\alpha, \beta, \gamma) = (2/3, 0, 1/3)$.

Koniec drogi – doszliśmy do rozwiązania

Jak więc wystarczy udowodnić lub sprawdzić nierówność z zadania wynika z trzech nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną (ważoną):

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\frac{ab^2}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{3}\frac{ca^2}{\sqrt[3]{abc}} &\geq ab \\ \frac{2}{3}\frac{bc^2}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{3}\frac{ab^2}{\sqrt[3]{abc}} &\geq bc \\ \frac{2}{3}\frac{ca^2}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{3}\frac{bc^2}{\sqrt[3]{abc}} &\geq ca \end{aligned}$$

Gdy zna się metode, rozwiązanie nie jest trikowe, ale gdybyśmy zobaczyli je nie znając metody, byłoby :] ∎

7. Danych jest 2010 liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_{2010}$. Pokazać, że można wybrać pewną ilość kolejnych wyrazów tego ciągu tak, że ich suma jest podzielna przez 2010.

DOWÓD. Niech $b_i = a_1 + \cdots + a_i$ dla $i = 1, \ldots, 2010$, ponadto niech $b_0 = 0$ (suma pustego ciągu indeksów).

Zauważmy, że jeżeli $2010 | b_i - b_j$ dla pewnych $i \neq j$, to poszukiwany podciąg istnieje (jeżeli $i < j$ to jest on równy $a_{i+1} + \ldots a_j$).

Mamy 2011 liczb b_i i tylko 2010 możliwych reszt z dzielenia przez 2010. Pewne dwie liczby muszą dawać taką samą resztę. To kończy dowód. ∎

8. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku długości 101 danych jest 10203 punktów. Uzasadnić, że pewna para punktów leży w odległości co najwyżej 1 od siebie.

   Dowód. Trójkąt równoboczny o boku 101 da się podzielić na 101^2 trójkącików równobocznych o boku 1. Zachodzi $101^2 = 10201 < 10203$, więc w pewnym z tych trójkątów będą leżeć 2 punkty. Pozostaje uzasadnić, że najdłuższym odcinkiem w trójkącie jest pewien jego bok, pozostawiam to czytelnikom :) . ■

Źródło: Staszic, mathlinks,Art Of Problem Solving i nie wiem co jeszcze