



Trikowe zadania

1. Liczby całkowite dodatnie $a < b$ są takie, że

$$a|b \text{ oraz } a - 1|b - 1$$

Udowodnić, że $b \geq a^2$.

2. Niech w trójkącie $\triangle ABC$ punkt $D \in AB$ oznacza punkt styczności okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ z bokiem AB , punkt $E \in AB$ oznacza punkt styczności okręgu dopisanego do boku AB tego trójkąta z bokiem AB .

Uzasadnić, że $|AE| = |BD|$.

3. Dany jest siedmiokąt foremny, o kolejnych wierzchołkach A, B, C, D, E, F, G . Punkt X jest przecięciem AC i BD . Uzasadnić, że

$$|AB| + |AX| = |AD|$$

4. W każde pole nieskończonej szachownicy wpisano liczbę naturalną tak, że każda liczba jest średnią arytmetyczną liczb sąsiadujących z nią. Udowodnij, że wszystkie liczby są równe.
5. Niech a, b, c będą bokami trójkąta. Czy z odcinków o długościach $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ da się zbudować trójkąt?
6. Iloczyn dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c wynosi 1. Wykaż, że

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq ab + bc + ca$$

7. Danych jest 2010 liczb całkowitych a_1, \dots, a_{2010} . Pokazać, że można wybrać pewną ilość kolejnych wyrazów tego ciągu tak, że ich suma jest podzielna przez 2010.
8. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku długości 101 danych jest 10203 punktów. Uzasadnić, że pewna para punktów leży w odległości co najwyżej 1 od siebie.

Źródło: Staszic, mathlinks, Art Of Problem Solving i nie wiem co jeszcze