PROSerwy – Teoria Liczb

Teoria:
1) Potęgi modulo
2) Dirichlet?
3) Znane triki jakieś (?)
4) W olimpijskiej – tw. Fermata

Zadania:
olimpijska:
całkowite dodatnie wszystkie
1) Wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą i $p \mid a^p - b^p$, to $p^2 \mid a^p - b^p$.
2) Wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą i $p \mid a^p - b^p$, to $p^m \mid a^{p^m} - b^{p^m}$.
3) Wykaż, że jeżeli $7 \mid x^3 + y^3 + z^3$, to $7 \mid xyz$.
4) Wykaż, że jeżeli $8 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 2$, to któraś z liczb *x,y, z* jest podzielna przez 4.
5) Udowodnij, że jeżeli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to *n* jest potęgą dwójki.
6) Znajdź wszystkie *n*, dla których $n! + 3$ jest kwadratem liczby naturalnej.
7) Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $4k + 1$, dla *k* całkowitego.

średnia:
całkowite wszystkie
1) Udowodnić, że $24 \mid x^3 - x$ dla x nieparzystego.
2) Udowodnić, że $120 \mid x^5 - x$ dla x nieparzystego.
3) Dla jakich n jest $n \mid \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$?
4) Udowodnij, że jest $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^1 b^{n-2} + b^{n-1})$.
5) Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

matma olimpijska:
1) Udowodnić, że jeżeli $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, i $n \mid m$ to $f_n \mid f_m$.
2) Udowodnić, że jeżeli $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ to największym wspólnym dzielnikiem f_n, f_{n+1} jest 1.
3) Objaśnienie ciągu Catalana.

wykład wieczorny.
1) Wyznaczyć wszystkie takie liczby pierwsze p, q, r, że każda z liczb $p^2 + qr, p + qr, q^2 + pr, q + pr, r^2 + pq, r + pq$ jest pierwsza.
2) Udowodnić, że a, b, c, d całkowite dodatnie i $ad = b^2 + bc + c^2$, to $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest złożona.
3) Dany jest trójmian $W(x) = ax^2 + bx + c$. Dla każdej liczby pierwszej *p* istnieje takie *k*, że $p \mid W(k)$ i $p \mid W(k+1)$. Udowodnić, że istnieje takie *m*, że $W(m) = W(m+1) = 0$.
4) Niech *a* będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że $a + 1$ nie jest potęgą 2. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb *n*, takich że $n \mid a^n + 1$.

5) Pokazać, że istnieje nieskończony ciąg rosnący liczb całkowitych dodatnich, taki, że dla każdych a,b z tego ciągu liczby $\binom{a}{2}$ i $\binom{b}{2}$ są względnie pierwsze. Symbol $\binom{n}{2}$ oznacza $\frac{n(n-1)}{2}$.