Kółko 15.12 - Teoria Liczb II, czyli święta już blisko

Zadania łatw(dn)iejsze.

1. Niech ciąg (Gib_n) będzie określony następująco $Gib_0 = 0$, $Gib_1 = 1$, $Gib_{n+1} = Gib_n + Gib_{n-1}$ dla $n \geq 1$.
   (a) Oblicz sumę $\sum_{i=0}^{n} Gig_i$.
   (b) Udowodnij, że $Gib_n^2 = Gib_{n-1}Gib_{n+1} + (-1)^{n+1}$, gdzie $n \geq 1$.
   (c) Dowiedź, że $Gib_n = Gib_{k-1}Gib_{n-k} + Gib_k Gib_{n-k+1}$ (albo coś podobnego :) dla wszystkich n, k, dla których indeksy nie są ujemne.
   (d) i z poprzedniego podpunktu wywnioskuj, że $Gib_n | Gib_m \Leftrightarrow n|m \vee n = 2$.
2. Liczby $a, b, \sqrt{a} + \sqrt{b}$ są wymierne. Dowiedź, że $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ też są wymierne.
3. Na kwadratowej tablicy $n \times n$ wpisano liczby 0 lub 1, przy czym jest dokładnie $n - 1$ jedynek. Na tablicy tej wykonujemy operację (działającą w $O(n)$): wybieramy liczbę $m \in \{1, -1\}$ oraz pole (i, j) i od liczby na tym polu odejmujemy m oraz dodajemy m do wszystkich liczb leżących w i-tym wierszu lub j-tej kolumnie oprócz pola (i, j). Czy po pewnej liczbie takich operacji możemy otrzymać tablicę złożoną z jednakowych wartości?
4. Wykaż, że jeżeli $k \neq n$, to liczby $2^{2^k} + 1$ i $2^{2^n} + 1$ są względnie pierwsze.
5. $\frac{1}{2}*$. Niech m będzie liczbą całkowitą dodatnią. Definiujemy $S = \{n \in \mathbb{N} | m^2 \leq n < (m+1)^2\}$. Udowodnić, że iloczyny postaci ab, gdzie $a, b \in S$ są różne, tj. $a_1 a_2 = b_1 b_2$ $(a_1, a_2, b_1, b_2 \in S)$ implikuje $\{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\}$.

Źródło zadań - kółko matematyczne PTM Białystok, prowadzone przez prof. Piotra Grzeszczuka.