
# TL — powtórka I

Joachim Jelisiejew
12 grudnia 2011

---

## 1.1 Zadania tylko na dodawanie lub tylko na mnożenie

*Dodawanie lub mnożenie, osobno, tworzą zadania raczej z kombinatoryki niż TL.*

**Zadanie 1**
Uzasadnić, że zbioru liczb $\{N, N+1, N+2, \ldots\}$ nie da się podzielić na dwa podzbiory spełniające warunek:

dla dowolnych, być może równych, elementów $a, b, c$ **nie** zachodzi $a + b = c$.

**Zadanie 2**
Przypomnij dowód, że jeśli $NWD(a, b) = 1$ i $ab = c^n$ (wszystkie liczby całkowite dodatnie), to istnieją $t, u$ takie, że $a = t^n, b = u^n$. Czy ten dowód jest prawdziwy bez założenia, że $a, b > 0$? A czy byłby on prawdziwy, gdyby rozważyć sytuację z trzema liczbami $a, b, c$, takimi, że $NWD(a, b, c) = 1$ i $abc = d^n$?

**Zadanie 3**
Podaj przykład 12122011-elementowego zbioru liczb całkowitych dodatnich $S$, takiego, że iloczyn dowolnego niepustego podzbioru zbioru $S$ nie jest sześcianem liczby całkowitej.

**Zadanie 4**
Znajdź najmniejszą liczbę $N$ taką, że

dla każdego zbioru $N$-elementowego $S$, którego elementami są liczby całkowite dodatnie o dzielnikach pierwszych ze zbioru $p_1, p_2, \ldots, p_{2011}$, istnieje podzbiór $S$ taki, że jego iloczyn jest sześcianem liczby całkowitej.

## 1.2 Suma lub liczba dzielników

**Zadanie 5**

1. przypomnij (wywnioskuj z postaci ciągowej) i udowodnij wzór na ilość $d(n)$ dzielników naturalnych (i całkowitych) liczby naturalnej $n$, w zależności od rozkładu na czynniki pierwsze,
2. zrób to samo dla $s(n)$ — sumy dzielników,
3. i dla sumy 2011 potęg dzielników.

*Przygotowania do zadania 8.*

**Zadanie 6**
Udowodnij, że $d(n) \leqslant n/2$ dla $n > N_0$ (wskaż $N_0$). Pokaż, że dla $s(n)$ taka nierówność nie zachodzi.
$\star$ Użyj podobnego rozumowania do pokazania, że $d(n) \leqslant n/2011$ dla $n > N_0$.

**Zadanie 7**
Niech $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ będzie dowolną funkcją, a $M$ dowolną liczbą naturalną. Udowodnij, że ciąg

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = f(a_n) \mod M, \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots.$$

jest od pewnego miejsca okresowy.

**Zadanie 8**
Niech $c$ będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Ciąg $(a_n)$ jest określony przez warunki

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = d(a_n) + c \text{ dla } n = 1, 2, \ldots.$$

gdzie $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby $m$. Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia $k$, że ciąg $a_k, a_{k+1}, \ldots.$ jest okresowy. *Źródło: 57 OM, etap drugi*