Kółko 1.12 - teoria liczb

Teoria - czyli kilka (nie)użytecznych rad

1. Teoria liczb dotyczy **całkowitych**. Wymiernych zwykle należy unikać.
2. W co pierwszym zadanku z teorii liczb trzeba użyć modulo (reszt z dzielenia). Jak się nie wie reszt z dzielenia przez co użyć, to najlepiej spróbować po kolei $2, 3, 4....$
3. Jak się już trochę rozwali zadanie z modulo, to można szacować (użyteczny do tego jest zwykle fakt: jeżeli $a, b > 0$ i a dzieli b, to $a \leq b$).
4. Jak się ma rozwiązać równanie w całkowitych dodatnich (czyli znaleźć wszystkie rozwiązania), to w 60% przypadków wszystkie rozwiązania są poniżej 10, czyli można znaleźć ręcznie wszystkie rozwiązania.
5. Zwykle niefajnie jest wykazywać, że coś jest równe 1, jeszcze niefajniej, że coś jest równe 2, a najfajniej jest wykazywać, że coś jest równe 0 - 0 jest jedyną liczbą podzielną przez dowolną liczbę, jedyną liczbą, która jest podzielna przez 2^n dla dowolnego n i tym podobne bajery.
6. Jak się ma pierwiastki i tym podobne świństwa, to najlepiej upraszczać, żeby ładnie wyglądało.
7. Najlepiej jest jednak nie zawsze słuchać rad, ale **myśleć** co się robi i co z tego może wyniknąć. Myślenie jest zwykle programem niestandardowym u informatyków, więc należy sobie doinstalować. Rozwiązanie wielu zadanek z danej dziedziny wybitnie zwiększa prędkość i jakość myślenia.

Teoria - czyli parę twierdzeń

1. Twierdzenie Fermata: jeżeli p jest pierwsze, to $p | a^p - a$ dla dowolnego a całkowitego.
2. Eee, chyba na razie więcej nie potrzeba :)

Zadania łatwe

1. Dla jakich n liczba $1! + 2! + \cdots + n!$ jest równa x^2 dla x całkowitego.
2. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie $x^3 - y^3 = 91$.
3. Dane są liczby naturalne n, k większe od 1, takie, że liczba $p = 2k - 1$ jest pierwsza. Rozstrzygnąć, czy jeżeli $p | \binom{n}{2} - \binom{k}{2}$, to $p^2 | \binom{n}{2} - \binom{k}{2}$.
4. 6 liczb pierwszych jest sześcioma kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego. Udowodnić, że różnica tego ciągu jest nie mniejsza od 30.

Zadania trudniejsze z kółka mat. V LO w Krakowie

1. Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich równanie $y^2 = x^3 + 16$.
2. Udowodnić, że równanie $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ posiada nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.
3. Rozwiązać równanie $(x + y)(1 + xy) = 2^b$ w liczbach całkowitych dodatnich x, y, b.
4. (Lepiej nie ruszać, nie wiem na ile trudne) Niech p - pierwsza, taka, że $2p + 1$ również pierwsza. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie $x^p + 2y^p + 5z^p = 0$.