Nieoficjalny i niefirmowy OM. Wersja β.

kółko I LO Białystok
11 grudnia 2012

Wywieszam w ramach uzupełnienia tego, co było na kółku. Moim zdaniem to są rozwiązania, które (prawdopodobnie) uzyskałyby 6 pkt i są przy tym krótkie (ale nie najkrótsze, jakie moim zdaniem dostałyby 6 – część rzeczy można byłoby pominąć). Treści, które można pominąć i komentarze są zaznaczone kursywą.

Uwaga: pisałem na szybko, więc mogą być błędy, zwłaszcza w 9. . . Mam nadzieję, że ktoś sprawdzi, gdyby było widać coś podejrzanego — proszę o informację.

Zadanie 9

Na płaszczyźnie ustawiono po jednym kamieniu w punktach $(0,0),(0,1),(1,0)$ i $(1,1)$. W jednym ruchu wybieramy dowolny kamień i przestawiamy go symetrycznie względem któregoś z pozostałych kamieni. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów trzy kamienie mogą znaleźć się na jednej prostej.

Rozwiązanie.

Dowiedziemy, że nie jest możliwe, by po pewnej liczbie ruchów kamienie leżały na jednej prostej.

Oznaczmy przez PP, PN, NP, NN kamienie leżące początkowo w punktach $(0,0),(0,1),(1,0)$ i $(1,1)$ odpowiednio. *Punktem symetrycznym do punktu (x,y) względem punktu (x_2,y_2) jest punkt $(2x_2-x, 2y_2-y)$.* Rozważmy jeden ruch: kamień k leżący na (x,y) odbijamy względem kamienia leżącego na (x_2,y_2). Po ruchu kamień k ma współrzędne $(2x_2-x, 2y_2-y)$, więc jego współrzędne są całkowite i dają takie same reszty z dzielenia przez 2, jak przed ruchem *(bo np. $2x_2-x = 2(x_2-x)+x$, czyli zmieniamy współrzędne o liczbę parzystą, tak samo dla y).* Wobec tego po każdej liczbie ruchów kamienie mają współrzędne całkowite i tej samej parzystości, co ma początku *czyli np. PN ma współrzędną pierwszą parzystą, a drugą nieparzystą.*

Lemat 1. *Punkty $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(x_1-x_2)\cdot(y_1-y_3) = (x_1-x_3)\cdot(y_1-y_2).$$

Uwaga: tutaj potrzeba źródła, tego tu brakuje, nie piszę, pytajcie np. Marysi!!!

Pozostaje sprawdzić, że ta równość nie jest spełniona dla żadnej trójki kamieni. Są cztery trójki, więc i cztery przypadki (identyczne, warto zrozumieć, dlaczego).

1. Kamienie $PP=(x_1,y_1), PN=(x_2,y_2), NP=(x_3,y_3)$ leżą na jednej prostej. Podstawiamy ich współrzędne otrzymując

$$(x_1-x_2)\cdot(y_1-y_3) = (x_1-x_3)\cdot(y_1-y_2).$$

   Wiemy, że liczby x_1,y_1,x_2,y_3 są parzyste, a liczby y_2,x_3 są nieparzyste *(sprawdź z początkowymi współrzędnymi).* Wobec tego lewa strona jest parzysta, a prawa nieparzysta.
2. Kamienie PP, PN, NN *(Uwaga: zmieniona kolejność!).* Jak wyżej, lewa strona jest parzysta, a prawa nieparzysta.
3. Kamienie PP, NN, NP. Identycznie jak w poprzednim przypadku.
4. Kamienie PN, NP, NN. Identycznie jak w poprzednim przypadku.

Zadanie 10

Dany jest prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Niech α,β,γ będą kątami utworzonymi przez przekątną AC' z krawędziami AB, AD i AA'. Udowodnić, że

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma \leqslant \frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma.$$

Rozwiązanie.

Kąty α,β,γ są ostre, więc ich tangensy są liczbami dodatnimi. Nierówność z zadania możemy więc podzielić stronami przez $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$ otrzymując

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}+\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha} \leqslant \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Oznaczmy $a := |AB|, b := |AD|, c := |AA'|$, z twierdzenia Pitagorasa $|BC'| = \sqrt{b^2+c^2}$, $|DC'| = \sqrt{a^2+c^2}$, $|A'C'| = \sqrt{a^2+b^2}$. Z definicji tg mamy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|BC'|}{|BA|} = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{|DC'|}{|DA|} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{b}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{|A'C'|}{|A'A|} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}.$$

Podstawiając to do lewej strony nierówności 1 otrzymujemy

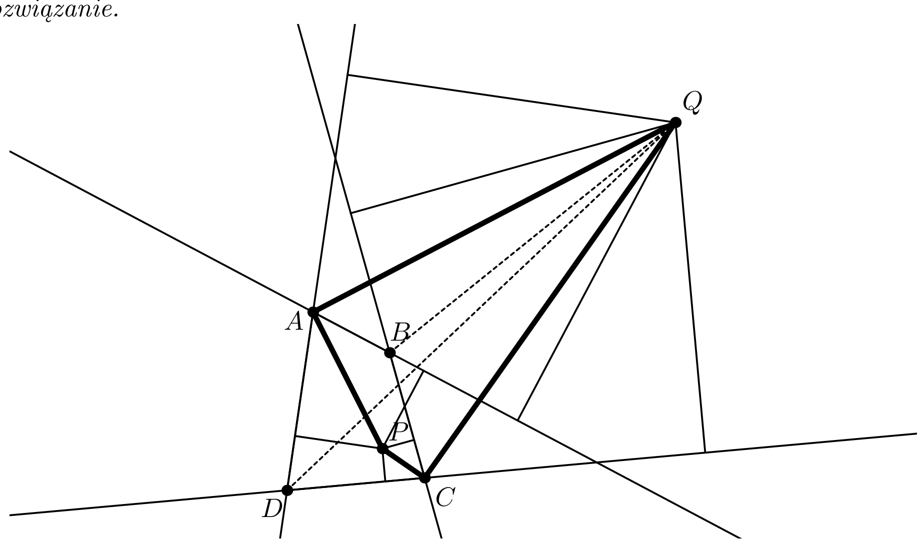
$$\frac{ab}{\sqrt{b^2+c^2}\cdot\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{bc}{\sqrt{c^2+a^2}\cdot\sqrt{b^2+a^2}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+a^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}} =$$
$$\sqrt{\frac{b^2}{b^2+c^2}}\sqrt{\frac{a^2}{a^2+c^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+a^2}}\sqrt{\frac{c^2}{c^2+a^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+b^2}}\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b^2}{b^2+c^2} + \frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+a^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{c^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Uwaga: korzystaliśmy tutaj trzykrotnie z nierówności $\sqrt{XY} \leqslant \frac{X+Y}{2}$*, która jest równoważna, po zwinięciu,* $(\sqrt{X}-\sqrt{Y})^2 \geqslant 0$.

Zadanie 11

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych A i C przecinają się w punkcie P, a proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych B i D przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że jeśli kąt PAQ jest prosty, to również kąt PCQ jest prosty.

Rozwiązanie.



Lemat 2. *Ustalmy proste k i l przecinające się w X. Wtedy zbiór punktów równoodległych od tych prostych jest sumą dwusiecznych kątów utworzonych przez proste k i l.*

Dowód. Weźmy dowolny punkt Y nie leżący na żadnej z prostych, niech Y_1, Y_2 oznaczają jego rzuty na proste k i l. Trójkąty XYY_1, XYY_2 są prostokątne. Zauważmy, że jeżeli $|Y_1Y| = |Y_2Y|$ to z tw. Pitagorasa $|XY_1| = |XY_2|$, więc XYY_1, XYY_2 są przystające *(bbb)*, stąd $\sphericalangle YXY_1 = \sphericalangle YXY_2$. Podobnie, jeżeli $\sphericalangle YXY_1 = \sphericalangle YXY_2$ to trójkąty te są przystające *(podobieństwo kkk i wspólny bok XY)*, więc $|XY_1| = |XY_2|$. Wobec tego punkt X leży w równych odległościach od k, l wtedy i tylko wtedy, gdy leży na dwusiecznej odpowiedniego kąta. □

Skoro $\sphericalangle PAQ = 90 = \frac{1}{2}\cdot 180°$ to $\sphericalangle QAB = \frac{1}{2}\cdot(180° - \sphericalangle BAD)$, więc Q leży na dwusiecznej kąta zewnętrznego BAD.

Oznaczmy przez $d(X,k)$ odległość punktu X od prostej k.

1. Skoro Q leży na dwusiecznej kąta wewnętrznego $\sphericalangle ABC$, to $d(Q,AB) = d(Q,BC)$.
2. Skoro Q leży na dwusiecznej kąta zewnętrznego $\sphericalangle BAD$, to $d(Q,AB) = d(Q,AD)$.
3. Skoro Q leży na dwusiecznej kąta wewnętrznego $\sphericalangle ADC$ to $d(Q,AD) = d(Q,DC)$.

Łącznie

$$d(Q,BC) = d(Q,AB) = d(Q,AD) = d(Q,DC).$$

Z lematu wynika teraz, że Q leży na dwusiecznej kąta wewnętrznego BCD lub zewnętrznego BCD. Gdy leży on na dwusiecznej kąta zewnętrznego to $\sphericalangle QCP = \frac{1}{2}\cdot(\sphericalangle BCD + 180° - \sphericalangle BCD) = 90°$.

Załóżmy zatem, że Q leży na dwusiecznej kąta wewnętrznego BCD, leży on również na dwusiecznych kątów wewnętrznych B i D. Analiza (*tutaj byłby rysunek, spróbuj sprawdzić na rysunku powyżej*) możliwych punktów przecięcia tych trzech prostych pokazuje, że Q musi leżeć wewnątrz czworokąta $ABCD$. *Ale leży on na dwusiecznej kąta zewnętrznego A, a ona nie przecina czworokąta $ABCD$ poza punktem A. Gdyby $Q = A$ to znaczyłoby, że dwusieczna kąta ABC przechodzi przez A, czyli kąt ten jest zerowy.* To pokazuje sprzeczność, wobec tego Q nie może leżeć na dwusiecznej kąta wewnętrznego BCD.

Zadanie 12

Zbadać, czy istnieje liczba całkowita większa od 2012^{2012}, której nie można przedstawić w postaci $x^2 + y^3 + z^6$, gdzie x, y i z są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie.

Pokażemy, że taka liczba istnieje. *Przedstawieniem* liczby S nazywamy zapis w postaci $S = X^2 + Y^3 + Z^6$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich X, Y, Z.

Rozważmy liczbę N będącą szóstą potęgą liczby K i zastanówmy się, jakie muszą być *z grubsza* x, y, z, żeby $x^2 + y^3 + z^6$ było liczbą z przedziału $[1, N]$. Skoro liczby są dodatnie, to musi zachodzi $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{N}, 1 \leqslant y \leqslant \sqrt[3]{N}$ oraz $1 \leqslant z \leqslant \sqrt[6]{N}$. Zauważmy dodatkowo, że jeżeli $x = \sqrt{N}$, to $x^2 = N$, więc $y^3 + z^6 \leqslant 0$, co zajść nie może. Wobec tego $x < \sqrt{N}$, czyli $x \leqslant \sqrt{N} - 1$.

Łącznie mamy więc $\sqrt{N} - 1$ możliwości wyboru x, $\sqrt[3]{N}$ możliwości wyboru y i $\sqrt[6]{N}$ możliwości wyboru z, więc potencjalnie $\sqrt{N} \cdot \sqrt[3]{N} \cdot \sqrt[6]{N} - \sqrt[3]{N} \cdot \sqrt[6]{N} = N - N^{1/2}$ trójek x, y, z. Z każdej trójki otrzymamy co najwyżej jedną liczbę, więc co najwyżej $N - N^{1/2}$ liczb z przedziału $[1, N]$ da się przestawić w żądanej postaci.

Jeżeli wybierzemy K dostatecznie duże (*np.* $K > 2012^{2012}$), to $N^{1/2} > 2012^{2012} + 1$. Gdyby wszystkie liczby większe od 2012^{2012} miały żądane przedstawienie, to w przedziale $[1, N]$ co najwyżej $N - 2012^{2012}$ liczb nie miałoby przedstawienia. Ale nie ma go co najmniej $N - N^{1/2} > N - 2012^{2012}$. Sprzeczność.