



# Świąteczne zadanka

MAGDALENA SZARKOWSKA, MARIA BANEL

DO 10 STYCZNIA 2014

Rozwiązania zadań należy przekazać Magdzie lub Marysi z klasy 3b najpóźniej 10 stycznia. Nie musicie rozwiązywać wszystkich zadań – warto zrobić chociaż kilka, żeby poćwiczyć to, co było wcześniej na kółkach.

## ZADANIE 1 (UKŁADY RÓWNAŃ)

Rozwiąż układ równań: 
$$\begin{cases} x + y + z = -12 \\ x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz \end{cases}$$

## ZADANIE 2 (RÓWNANIE FUNKCYJNE)

Wyznacz wszystkie funkcje  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takie, że:

$$f(x + y) = f(2x) + f(3y)$$

## ZADANIE 3 (MAŁE TWIERDZENIE FERMATA)

Niech  $n \geq 1$  będzie liczbą naturalną, zaś  $x_1, x_2, \dots, x_n$  liczbami całkowitymi, których suma dzieli się przez 10. Udowodnić, że liczba  $x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_n^5$  jest również podzielna przez 10.

## ZADANIE 4 (ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA)

W kole o promieniu 1 wybrano siedem punktów. Wykaż, że istnieje wśród nich co najmniej jedna para punktów, których odległość jest nie większa od 1.

## ZADANIE 5 (KONGRUENCJE)

Czy  $10^{49} + 5^3$  dzieli się przez 7? Odpowiedź uzasadnij.

## ZADANIE 6 (CHIŃSKIE TWIERDZENIE O RESZTACH)

Ania ma dużo zadań z matematyki do rozwiązania. Postanowiła podzielić je po równo na pewną ilość dni. Jeśli podzieli je na 3 dni, to czwartego dnia pozostaną dwa zadania do rozwiązania. Jeśli na 5 dni, to szóstego dnia będzie musiała rozwiązać 3 zadania, a jeśli na 7, to na ósmy dzień zostaną 2 zadania. Ile zadań musi rozwiązać Ania?

## ZADANIE 7

Otwarte z góry pudełko ma kształt prostopadłościanu, którego dolna podstawa ABCD jest kwadratem o boku długości 6, zaś wysokość pudełka jest równa 1. W wierzchołku A (ale na zewnątrz pudełka) znajduje się mrówka. W wierzchołku C (wewnątrz pudełka) znajduje się kryształek cukru. Wyznacz długość najkrótszej drogi, jaką musi pokonać mrówka do kryształka cukru?