



# Geo musi odejść

KÓŁKO I LO BIAŁYSTOK  
20 LUTEGO 2012

---

*Sporo zadań z tego kółka jest wziętych ze skryptu dra Pompe.*

## 1.1 Teoria

Styczne do okręgu  $o$  wypuszczone z punktu  $P$  są równej długości, bo są symetryczne względem prostej łączącej  $P$  ze środkiem okręgu. Liczyłeś na więcej teorii? Nie dzisiaj.

### ZADANIE 1

Odcinki  $AB$  i  $CD$  są wspólnymi stycznymi zewnętrznymi okręgów  $o_1, o_2$  (na kółku wyjaśnię, co to znaczy). Uzasadnij, że  $|AB| = |CD|$ .

Dla uproszczenia notacji:  $a := |BC|, b := |CA|, c := |AB|$  gdzie  $ABC$  jest trójkątem.

### ZADANIE 2

Niech  $D, E, F$  będą punktami styczności okręgu wpisanego w  $\triangle ABC$  do boków  $BC, CA, AB$  odpowiednio. Uzasadnij, że

$$|AE| = |AF| = \frac{b+c-a}{2}, \quad |BD| = |BF| = \frac{a+c-b}{2}, \quad |CD| = |CE| = \frac{a+b-c}{2}.$$

### ZADANIE 3

Okrąg dopisany do boku  $AB$  trójkąta  $\triangle ABC$  to okrąg styczny do  $AB$  i do przedłużeń boków  $BC, CA$ . Oznaczmy punkty styczności tego okręgu do  $BC, CA, AB$  jako  $D, E, F$  odpowiednio. Udowodnij, że

$$|AF| = |AE| = \frac{a+c-b}{2}, \quad |BF| = |BD| = \frac{b+c-a}{2}, \quad |CD| = |CE| = \frac{a+b+c}{2}.$$

### ZADANIE 4

Okręgi dopisane do boków  $AC, BC$  trójkąta  $ABC$  są styczne do tych boków w  $E, D$  odpowiednio. Udowodnij, że  $AE = BD$ .

### ZADANIE 5

Niech  $D_1$  będzie punktem styczności okręgu dopisanego do boku  $AB$  trójkąta  $\triangle ABC$  z bokiem  $AB$ . Niech  $D_2$  będzie punktem styczności okręgu wpisanego w  $\triangle ABC$  do boku  $AB$ . Uzasadnij, że  $D_1, D_2$  są symetryczne względem środka  $AB$ .

### ZADANIE 6

Okręgi  $o_1$  i  $o_2$  są styczne w  $X$ . Prosta  $AB$  jest ich wspólną styczną zewnętrzną, przy czym  $A, B$  są punktami styczności. Uzasadnij, że  $\sphericalangle AXB = 90^\circ$ .

### ZADANIE Z \* 7

Udowodnij, że w czworokąt wypukły  $ABCD$  można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy  $AB + CD = AD + BC$ .

*Wskazówka: gdy mamy okrąg wpisany, jest prosto. W drugą stronę trzeba narysować okrąg styczny do trzech boków i skorzystać z nierówności trójkąta.*

### ZADANIE 8

Wykaż, że w czworokąt wypukły  $ABCD$  można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi wpisane w trójkąty  $ABD$  i  $BCD$  są styczne.