Najmocniejsze twierdzenie stereometrii i koledzy

kółko I LO Białystok

16 października 2012

Oczywistym odnośnikiem do zadań ze stereometrii jest *V. V. Prasolow "Problems in plane and solid geometry" volume 2*. Zadania spotykane na OMie są jednak zwykle dużo prostsze od tego, co można tam spotkać. Ogólną metodą rozwiązywania tych zadań jest wyobrażanie sobie sytuacji przestrzennej i/lub sprowadzanie zadań do zadania z geometrii płaszczyzny przez zrzutowanie czy przecięcie z płaszczyzną.

Zadanie 1
Środki krawędzi czworościanu są wierzchołkami wielościanu. Udowodnij, że trzy długie przekątne tego wielościanu przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 2 (Prasolov, 2.1)
Przekątna AC_1 sześcianu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ przecina płaszczyznę A_1BD w punkcie M. Uzasadnij, że $AM = \frac{1}{3} \cdot AC_1$.

Twierdzenie 1 (Twierdzenie o trzech prostopadłych, szczególny przypadek)**.** *Prosta l, nie prostopadła do płaszczyzny π, przecina π w P. Uzasadnij, że jeśli l' jest rzutem tej prostej na π a k jest prostą leżącą w płaszczyźnie π i zawierającą P to*

$$l \perp k \iff l' \perp k.$$

Zadanie 3 (Prasolov, 2.9)
Dowiedź prawdziwości twierdzenia.

Definicja 2. *Prosta l jest styczna do sfery s, jeżeli przecina ona sferę w dokładnie jednym punkcie P. W tej sytuacji promień sfery poprowadzony do punktu P i prosta l są prostopadłe.*

Zadanie 4
Prosta l jest styczna do sfery s w P. Uzasadnij, że jest ona styczna do każdego z okręgów zawartych w s i przechodzących przez P.

Zadanie 5
Krawędź AD czworościanu $ABCD$ jest prostopadła do płaszczyzny ABC. Uzasadnij, że rzut wysokości opuszczonej z D w trójkącie $\triangle BCD$ na płaszczyznę ABC jest wysokością opuszczoną z A w trójkącie $\triangle ABC$.

Poniższe zadania pochodzą z artykułu Michała Kiezy
`http://mimuw.edu.pl/delta/artykuly/delta2010-03/2010-03-kacik_przestrzenny.pdf`

Twierdzenie 3 (Najmocniejsze twierdzenie stereometrii)**.** *Wszystkie odcinki będące stycznymi do sfery wychodzącymi z punktu P mają równe długości.*

Zadanie 6
Dowiedź prawdziwości twierdzenia.

Zadanie 7
Sfera s jest styczna do płaszczyzny ABS w S i do płaszczyzny ABT w T. Uzasadnij, że $\triangle ABS \equiv \triangle ABT$.

Zadanie 8
Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian ABC i BCD odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że

1. $\sphericalangle BPC = \sphericalangle BQC$,
2. (troszkę obliczeń) $\sphericalangle APB = \sphericalangle CQD$.