Zadania z geometrii, które polecił mi Yogi do zrobienia, czyli to co każdy lubi.

1. Jednokładność – ważne, mi się przydaje przy okręgach

1. TEORIA

1.1. Definicja - Jednokładność o środku O i skali α to przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę, które przekształca punkt A na taki punkt A', że $\vec{OA'} = \alpha \cdot \vec{OA}$.

1.2. Jednokładność o skali różnej od 1 ma dokładnie jeden punkt stały - środek jednokładności.

1.3. Jednokładność przekształca dowolną figurę na figurę do niej podobną.

1.4. Środek jednokładności, punkt i jego obraz leżą na jednej prostej.

1.5. Jednokładność zmienia orintację wtedy i tylko wtedy, gdy ma ujemną skalę.

1.6. Złożenie dwóch jednokładności o środkach O_1, O_2jest:

- jeśli $\alpha \cdot \beta = 1$ - przesunięciem
- jeśli $\alpha \cdot \beta$ różne od 1 - jednokładnością o skali $\alpha \cdot \beta$ i środku leżącym na prostej O_1O_2

2. ZADANIA

2.1. Dany jest okrąg o i dwa różne punkty A i B należace do tego okręgu. Znale"xć zbiór środków ciezkości wszystkich takich trójkątów ABP, że punkt P należy do tego okręgu.

2.2. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem ciężkości, punkt H jest ortocentrum, a punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Wykazać, że punkty D, H, O są współliniowe i $DH = 2 \cdot DO$

2.3. Okręgi o_1 i o_2 są wpisane w kąt o wierzchołku P oraz w kąty wierzchołkowe o wierzchołku Q. Punkt R należy do okręgu o_1, a proste PR i QR przecinają okrąg o_2 w czterech punktach. Wykazać, że dwa spośród tych punktów są końcami jednej średnicy okręgu o_2.

2.4. Punkt P należy do wnętrza czworokąta wypukłego $ABCD$. Wykazać, że środki cieżkości trójkątów: ABP, BCP, CDP, DAP są wierzchołkami równoległoboku.

2.5. Przystające, rozłączne okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach odpowiednio A i B. Punkt P należy do okręgu o, odcinki PA i PB przecinają okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach C i D. Wykazać, że $AB \parallel CD$.

2.6. Dany jest sześciokąt $ABCDEF$. Wykazać, że środki cieżkości trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB są wierzchołkami sześciokąta, którego przeciwległe boki są równe i równoległe.

2.7. Dany jest trójkąt ABC. W kąty przy wierzchołkach A i B wpisać dwa przystające okręgi styczne zewnętrznie.

2. Twierdzenie Cevy i Menelaosa – mało przydatne, ale warto wiedzieć

1. TEORIA

1.0.Twierdzenie o dwusiecznej
Niech AD będzie dwusieczną w trójkącie ABC. Wtedy $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$.

1.1.Twierdzenie Cevy
Niech punkty X, Y, Z leżą odpowienio na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC. Wtedy proste AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$.

1.2.Twierdzenie Menelaosa
Niech punkty Z i Y leżą odpowiednio na bokach AC i BC trójkąta ABC, a punkt X na przedłużeniu boku AB. Wtedy punkty X, Y, Z są współliniowe wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1$.

2. ZADANKA

2.1. Korzystając z twierdzenia Cevy udowodnić że w trójkącie ostrokątnym w jednym punkcie przecinają się: środkowe; dwusieczne; wysokości.

2.2. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do jego boków AB, BC, CA odpowiednio w punktach F, D, E. Udowodnić, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

2.3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC. Proste AP, BP, CP przecinają boki tego trójkąta odpowiednio w punktach A_1, B_1, C_1. Proste A_1B_1 i A_1C_1 przecinają prostą przechodzącą przez A i równoległą do BC odpowiednio w punktach C_2 i B_2. Wykazać, że $AB_2 = AC_2$.

2.4. AD jest dwusieczną w trójkącie ABC, a jej symetralna przecina prostą BC w punkcie E. Wykazać, że $\frac{BE}{CE} = (\frac{AB}{AC})^2$.

2.5. Z wierzchołka C kąta prostego trójkąta ABC poprowadzono wysokość CK i dwusieczną CE. Prosta przechodząca przez B i równoległa do prostej CE przecina prostą CK w punkcie F. Wykazać, że prosta EF dzieli odcinek AC na połowy.

2.6. Wewnątrz trójkąta ABC leży punkt P. Proste AP, BP, CP przecnają boki trójkąta odpowiednio w punktach K, L, M. Wykazać, że $\frac{AP}{PK} = \frac{AL}{LC} + \frac{AM}{MB}$.

2.7. Dane są trzy okręgi rozłaczne zewnętrznie okręgi o_1, o_2, o_3 o środkach odpowiednio O_1, O_2, O_3. Dwie spośród stycznych do obu okręgów o_2 i o_3 przecinają się w punkcie A_1, leżącym na odcinku O_2O_3. Analogicznie definiujemy punkty A_2 i A_3. Udowodnić, że proste O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3 przecinają się w jednym punkcie.

3. Izometria – ważne, bo obroty itp.

1. TEORIA

1.0. Definicja: Izometria (przekształcenie izometryczne) to takie przekształcenie płaszczyzny na tę samą płaszczyznę, które zachowuje odległości.

1.1. Izometria przekształca dowolną figurę na figurę do niej przystającą, m.in. zachowuje kąty, współliniowość punktów oraz kolejność punktów na prostej.

1.2. Wszystkie izometrie dzielimy na:

- przesunięcie (translację) [$T_{\vec{v}}$ - translacja o wektor $\vec{v}$]
- obrót [R_A^α - obrót o kąt skierowany α wokół punktu A] (szczególny przypadek to symetria środkowa [S_A - symetria środkowa o środku w punkcie A])
- symetrię z poślizgiem - złożenie symetrii osiowej i przesunięcia o wektor równoległy do osi symetrii (szczególny przypadek to symetria osiowa [S_k - symetria osiowa względem prostej k])

1.3. Izometrie dzielimy na parzyste i nieparzyste. Nieparzyste zmieniają orientację figur. Wszystkie izometrie nieparzyste są pewnymi symetriami z poślizgiem (być może zerowym).

1.4. Złożenie dwóch izometrii jest zawsze izometrią, m.in:

- $R_A^\alpha \circ R_B^\beta = R_C^{\alpha+\beta}$, gdzie C jest takim punktem, że $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$ i $\angle CBA = \frac{\beta}{2}$ (jeśli $\alpha + \beta = 360°$, otrzymamy przesunięcie o pewien wektor, dla dwóch symerii środkowych o środkach A, B, będzie to przesuniecie o wektor $2\vec{BA}$)
- $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$
- jeśli $k \parallel l$, to $S_k \circ S_l = T_{2\vec{u}}$, gdzie $\vec{u}$ jest wektorem prostopadłym do k oraz $T_{\vec{u}}(l) = k$.
- jeśli $k \nparallel l$, to $S_k \circ S_l = R_A^{2\alpha}$, gdzie $A = k \cap l$ oraz α jest kątem pomiędzy prostymi l i k.

2.ZADANKA

2.0. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $AB = x$ i $BC = y$. Punkt P należy do wnętrza tego równoległoboku i $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$, $PD = d$. Wykazać, że istnieje czworokąt wypukły o przekątnych długości x i y oraz bokach długości a, b, c, d.

2.1. Punkt P należy do krótszego łuku AB okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC. Wykazać, że $PA + PB = PC$.

2.2. Dany jest kąt wypukły α i punkt A w jego wnętrzu. Znaleźć takie punkty B i C należące do różnych ramion tego kąta, by obwód trójkąta ABC był najmniejszy.

2.3. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt P jest środkiem boku AD, a punkt Q jest środkiem boku BC. Wykazać, że $2 \cdot PQ = AB + CD$ wtedy i tylko wtedy, gdy proste AB i CD są równoległe.

2.4. Punkty P, Q, R należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC. Punkty K, L, M są środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach ARQ, BPR, CQP. Wykazać, że trójkąty ABC i KLM są podobne.

2.5. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami jego boków AB, BC, CD, DA. Proste k, l, m, n przechodzą odpowiednio przez punkty K, L, M, N i są prostopadłe odpowiednio do prostych CD, DA, AB, BC. Wykazać, że proste k, l, m, n przecinają się w jedym punkcie.

2.6. Trójkąty równoboczne ABC i AEF mają taką samą orientację. Punkty K, L, M są środkami odpowiednio odcinków BC, CE, EF. Wykazać, że $KL = LM$.

4. Przydatne lematy, jeśli znasz je na pamięć, to są podstawowe lematy

1. TEORIA

1.1. Aby rozwiązać zadanie, należy:
- przeczytać treść zadania
- jeszcze raz przeczytać treść zadania
- przemyśleć treść zadania
- przeczytać treść zadania i sprawdzić, czy dobrze się rozumie
- rozwiązać zadanie
- przeczytać treść i sprawdzić, czy się rozwiązało to, co trzeba

1.2. Gdy nie wiesz, co zrobić - dorysuj równoległobok.

1.3. Jeśli nic nie widzisz na rysunku, dorysuj kolejną kreskę.

1.4. Gdy inni nic nie widzą na rysunku - użyj kredek :)

2.ZADANKA

2.1. Niech o będzie okręgiem opisanym na trójkącie ostrokątnym ABC, zaś I środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Półprosta AI przecina okrąg o ponownie w punkcie D. Wykazać, że $BD = CD = ID$.

2.2. Niech H będzie ortocentrum w trójkącie ostrokątnym ABC, zaś H' - jego odbiciem względem AB. Wykazać, że H' leży na okręgu opisanym na ABC.

2.3. Wykazać, że w dowolnym trójkącie środki boków, spodki wysokości i środki odcinków łączących ortocentrum z wierzchołkami trójkąta leżą na jednym okręgu.

2.4. Udowodnić, że w dowolnym trójkącie ostrokątnym ABC istnieje dokładnie jeden punkt P taki, że $\angle CAP = \angle ABP = \angle BCP$.

2.5. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. K, L, M, N są środkami okręgów wpisanych w ABC, BCD, CDA, DAB. Wykazać, że $KLMN$ jest prostokątem.

2.6. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Proste AI i BI przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P i Q, różnych od A i B. Punkt F jest takim punktem, że czworokąt $CPFQ$ jest równoległobokiem. Dowieść, że jeśli $I \neq F$, to proste IC i IF są prostopadłe.

2.7. Punkt P należy do wnętrza trójkąta równobocznego ABC. Proste PA, PB i PC przecinają boki tego trójkąta odpowiednio w punktach D, E i F. Wykazać, że $PD+PE+PF < AB$.

5. Potęga punktu – było to już u nas, ale warto sobie utrwalić to

1. Definicja Niech k będzie pewną prostą mającą dwa punkty wspólne z okręgiem o - B i C przechodzącą przez punkt A (nienależący do okręgu o). Wtedy potęgą punktu A względem okręgu o nazywamy $AB \cdot AC$.

2. Potęga punktu A względem okręgu o jest stała niezależnie od wyboru prostej k. W szczególności jest równa AD^2, gdzie D jest punktem styczności prostej przchodzącej przez A z okręgiem o (dla A na zewnątrz okręgu).

3. Potęga punktu A względem okręgu o jest równa $|AO^2 - r^2|$, gdzie O jest środkiem okręgu o, zaś r - jego promieniem.

4. Wszystkie punkty mające tę samą potęgę względem pewnego okręgu o_1 leżą na okręgu współśrodkowym z o_1.

5. Dane są punkty A, B, C leżące w tej własnie kolejności na prostej k oraz prosta l różnaód k i lężące na niej w tej kolejności punkty A, D, E. Wtedy, jeśli $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ to punkty B, C, D, E leżą na jednym okręgu.

1.1. Niech o_1, o_2 będą pewnymi okręgami niewspółśrodkowymi. Udowodnić, że zbiór wszystkich takich punktów A, że potęga A względem o_1 jest równa potędze punktu A względem o_2 jest prostą (taką prostą nazywamy osią potęgową okręgów o_1 i o_2).

1.2. Dane są 3 okręgi parami niewspółśrodkowe: o_1, o_2 i o_3. Wykazać, że osie potęgowe par okręgów: o_1 i o_2, o_2 i o_3, o_1 i o_3, przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

2.1. Punkty E i F należą odpowiednio do boków AC i AB trójkąta ABC, odcinki BE i CF przecinają się w punkcie M i $ME \cdot MB = MC \cdot MF$. Wykazać, że $AF \cdot AB = AE \cdot AC$.

2.2. Przekątna BD równoległoboku $ABCD$ jest dłuższa od przekątnej AC. Okrąg opisany na trójkącie ABC przecina BD w punkcie E. Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie AED jest styczny do prostej AC.

2.3. Okrąg o jest styczny w punkcie D do prostej k. Cięciwa AB tego okręgu jest równoległa do prostej k, punkt C należy do prostej k, a odcinki AC i BC przecinają okrąg o w punktach odpowiednio E i F (różnych od "A i B). Wykazać, że prosta EF przechodzi przez środek odcinka CD.

2.4. Sześciokąt wypukły $ABCDEF$ spełnia warunki: $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Wykazać, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF, FAB, poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E, A, przcinają się w jednym punkcie.

2.5. Punkty A, B, C, D leża na prostej w tej właśnie kolejności. Przez punkty A i B prowadzimy okrąg o_1, przez punkty C i D prowadzimy okrąg o_2. Okręgi te przecinają się w punktach E i F. Wykazać, że przy ustalonych A, B, C, D, dla wszystkich par okręgów o_1 i o_2, proste EF przechodzą przez pewien ustalony punkt.

6. Skrypt o środku masy – raczej do poczytania, choć dość ciekawe

O metodach fizycznych w geometrii

Piotr Achinger

Poniżej postaram się pokazać, jak szerokie zastosowania w geometrii mogą mieć pojęcia znane zapewne większości Czytelników z lekcji dynamiki. Są to *środek masy* oraz *moment bezwładności*. Ograniczę się jednak do geometrii płaskiej, i to głównie geometrii trójkąta.

Środek masy. Dla uściślenia, *układem* będziemy nazywali zbiór par (m_i, P_i) ("mas punktowych"), gdzie P_i jest puntem płaszczyzny, m_i zaś jego "masą" (dla $i = 1, 2, \ldots, n$). Aby nie wzbudzić kontrowersji, początkowo przyjmijmy, że "masy" takie są liczbami rzeczywistymi dodatnimi (potem jednak pozbędziemy się tego zbędnego ograniczenia).
Jak wiadomo, środkiem masy danego układu nazywamy taki punkt G, że

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \cdot \overrightarrow{OP_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OP_2} + \ldots + m_n \cdot \overrightarrow{OP_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

gdzie O jest początkiem układu współrzędnych. Warto przytoczyć (bez dowodu, choć wszystkie są jednolinijkowe) kilka ogólnie znanych faktów dotyczących środka masy:

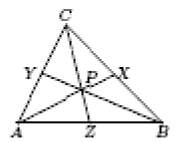
1. Nie zależy on od wyboru układu współrzędnych.

2. Jeżeli A, B, C są masami punktowymi, a masa punktowa Z leży w środku masy układu $\{A, B\}$ i ma wartość równą sumie mas A i B, to środek masy układu $\{A, B, C\}$ jest środkiem masy układu $\{Z, C\}$, leży więc na odcinku ZC.

3. Stosunek, w jakim środek masy układu dwóch dodatnich mas punktowych umieszczonych w punktach A i B dzieli odcinek AB, jest równy stosunkowi tych mas.

Jak wiadomo, jeżeli w wierzchołkach trójkąta ABC umieścimy równe masy, to środek masy takiego układu będzie środkiem ciężkości tego trójkąta. Możemy zastanowić się, jakie masy m_A, m_B, m_C umieścić w wierzchołkach, aby środek masy otrzymanego układu był innym punktem szczególnym trójkąta, np. środkiem okręgu wpisanego (rys.1). Skoro środek okręgu wpisanego P leży na odcinku CZ, to (korzystamy z faktu 2.) punkt Z musi być środkiem ciężkości dla mas w A i B, zatem (fakt 3.) $\frac{BZ}{AZ} = \frac{m_A}{m_B}$, lecz (z twierdzenia o dwusiecznej) $\frac{BZ}{AZ} = \frac{a}{b}$, wystarczy zatem wziąć $m_A = a$, $m_B = b$, $m_C = c$.

Chcąc otrzymać np. ortocentrum lub środek okręgu opisanego, musimy zastanowić się nad przypadkiem, gdy któryś z nich leży poza trójkątem — manipulując nieujemnymi masami możemy otrzymać tylko punkty z uwypuklenia zbioru $\{A, B, C\}$, czyli z trójkąta ABC. Przyjmijmy zatem, że masy są dowolnymi liczbami rzeczywistymi (właściwszą analogią wydaje się teraz pojęcie ładunku elektrycznego). Powyższe stwierdzenia pozostają w mocy, jeśli zaznaczymy, że środek masy nie istnieje, gdy masa układu jest równa 0. Ortocentrum trójkąta możemy otrzymać, umieszczając w A, B, C masy $\operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma$, $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma$, $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$, dla środka okręgu opisanego zaś masy będą równe $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$ (sprawdzenie tych prawidłowości nie powinno nastręczyć Czytelnikowi zbyt wiele kłopotu).



Rysunek 1.

Przejdźmy zatem do zadań.

Zadanie 1 (Tw. Čevy). Punkty X, Y, Z leżą na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Wykazać, że proste AX, BY, CZ mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1.$$

Rozwiązanie. 1° Załóżmy, że proste te przecinają się w punkcie P. Umieśćmy w punktach A, B, C masy odpowiednio $m_A = BZ \cdot CX$, $m_B = AZ \cdot CX$, $m_C = BX \cdot AZ$, wówczas (korzystając z faktu 3.) punkty Z i X będą środkami mas dla par A, B i B, C, zatem środek masy całego układu będzie leżał zarówno na prostej CZ, jak i AX, będzie to zatem punkt P. Z faktu 3. wiemy także, że $\frac{CY}{AY} = \frac{m_A}{m_C} = \frac{BZ}{BX} \cdot \frac{CX}{AZ}$, skąd wynika teza.
2° Załóżmy, że $\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$. Określmy masy w wierzchołkach jak poprzednio. Wówczas punkt X będzie środkiem masy dla B i C, zatem środek masy całego układu będzie leżał na odcinku AX, analogicznie na BY i CZ, więc odcinki te mają punkt wspólny.

Zadanie 2 (Tw. Van Aubela). Przy założeniach z poprzedniego zadania, wykazać, że jeśli proste AX, BY, CZ przecinają się w punkcie P, to $\frac{AP}{PX} = \frac{AY}{YC} + \frac{AZ}{ZB}$.

Rozwiązanie. Niech masy m_A, m_B, m_C będą określone tak, aby punkt P był środkiem masy. Wówczas $\frac{AY}{YC} = \frac{m_C}{m_A}$, $\frac{AZ}{ZB} = \frac{m_B}{m_A}$, punkt X zaś jest środkiem mas w B i C, możemy zatem (fakt 2.) umieścić w nim masę $m_X = m_B + m_C$ i uznać punkt P za środek mas w A i X, zatem (fakt 3.) $\frac{AP}{PX} = \frac{m_X}{m_A} = \frac{m_B + m_C}{m_A}$, skąd wynika teza.

Zadanie 3. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC wpisanego w okrąg o środku w O. Wykazać, że pola pewnych dwóch z trzech trójkątów OHA, OHB, OHC sumują się do pola trzeciego.

Rozwiązanie. Wielu Czytelników zna zapewne fakt następujący: punkty O, H oraz środek ciężkości M trójkąta leżą na jednej prostej (tzw. *prostej Eulera*). Obierzmy układ współrzędnych, w którym oś OX jest prostą Eulera, niech punkty A, B, C mają w nim współrzędne

(x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_B, y_B). Trójkąty OHA, OHB, OHC mają wspólną podstawę OH, należy więc wykazać, że wysokości opuszczone na OH dwóch z nich sumują się do wysokości trzeciego, wysokości te zaś są równe $|y_A|$, $|y_B|$, $|y_C|$. Oczywiście $0 = y_M = \frac{y_A+y_B+y_C}{3}$ (z definicji środka masy dla mas równych 1 , czyli środka ciężkości), skąd wynika teza.

Moment bezwładności. *Momentem bezwładności* danego układu względem punktu X nazywamy liczbę

$$I_X = \sum m_i r_i^2,$$

gdzie $r_i = |XP_i|$. Fizycy używają tej wielkości do charakterystyki ruchu obrotowego brył sztywnych (wówczas punkt X uważamy za punkt przebicia płaszczyzny prostopadłą do niej osią obrotu), ma on jednak także zastosowanie w geometrii, głównie dzięki bardzo mocnemu twierdzeniu, znanemu jako

Twierdzenie Steinera. Jeżeli dany układ ma niezerową masę (czyli posiada środek masy), to dla dowolnego punktu X zachodzi równość

$$I_X = I_G + Md^2,$$

gdzie G - środek masy, M - masa układu, $d = |GX|$.

Dowód. Weźmy układ współrzędnych, w którym $G = (0, 0)$ oraz $X = (d, 0)$. Wówczas

$$I_X = \sum m_i \left((x_i - d)^2 + y_i^2 \right) = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) -$$

$$-2d \sum m_i x_i + d^2 \sum m_i = I_G + 0 + Md^2.$$

gdyż $0 = x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$ implikuje $\sum m_i x_i = 0$.

Wniosek. Jeśli masa układu jest dodatnia, moment bezwładności jest najmniejszy względem środka masy tego układu.

Cóż, zobaczmy, jak się ma to do rozwiązywania zadań.

Zadanie 4. W trójkącie ABC znaleźć taki punkt X, aby suma $AX^2 + BX^2 + CX^2$ była najmniejsza.

Rozwiązanie. Umieśćmy masy 1 w wierzchołkach trójkąta. Wówczas rozpatrywana suma jest momentem bezwładności układu względem X, zatem jest najmniejsza, gdy X jest środkiem masy, czyli środkiem ciężkości trójkąta ABC.

Zadanie 5. Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym ABC. Wykazać, że suma $AP^2 + BP^2 + CP^2$ nie zależy od wyboru punktu P.

Rozwiązanie. Umieśćmy ponownie masy 1 w wierzchołkach oraz oznaczmy środek okręgu przez O, jego promień zaś przez R. Rozpatrywana suma jest momentem bezwładności układu względem P, zatem (z tw. Steinera) jest równa $AO^2 + BO^2 + CO^2 + 3PO^2 = 6R^2$.

Zadanie 6. Punkt P leży na okręgu wpisanym w trójkąt ABC. Wykazać, że suma $AP^2BC + BP^2AC + CP^2AB$ nie zależy od wyboru punktu P.

Rozwiązanie. Umieśćmy masy równe $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ w wierzchołkach A, B, C oraz oznaczmy środek okręgu wpisanego przez I. Suma $AP^2BC + BP^2AC + CP^2AB$ jest momentem bezwładności układu względem P, środek masy natomiast leży (co już udało nam się udowodnić) w punkcie I, którego odległość od P jest stała.

Metody te stosują się nie tylko do geometrii, co ilustruje poniższy przykład:

Zadanie 5. Na każdym polu szachownicy 2000×2000 leży kamyk. Ruch polega na przesunięciu dwóch kamyków leżących na polach oddalonych o 2 (w jednej kolumnie lub rzędzie) na pole pomiędzy nimi (na jednym polu może leżeć dowolna liczba kamieni).
1° Czy można tak wybrać kolejność ruchów, aby wszystkie kamyki znalazły się na jednym polu?
2° Czy w tę grę można grać w nieskończoność?

Rozwiązanie. 1° Nie, gdyż ruch zachowuje środek masy wszystkich kamieni (zakładamy, że są one jednakowo ciężkie), który leży w środku szachownicy, zatem finalnie wszystkie kamienie musiałyby znaleźć się pośrodku, pomiędzy kratkami, gdyż bok szachownicy ma parzystą długość!.
2° Nie, gdyż (co łatwo pokazać) każdy ruch zmniejsza moment bezwładności wszystkich kamieni względem środka szachownicy o liczbę całkowitą dodatnią (przyjmujemy, że bok pola szachownicy ma długość 1, masy kamieni zaś są równe 1), nie może on jednak spaść poniżej 0.

Oczywiście, wszystkie te zadania można zrobić dość łatwo innymi metodami, które w zasadzie sprowadzałyby się do tego, o czym piszę powyżej, tylko inaczej ujętego. Operowanie jednak pojęciami tutaj opisanymi pozwala jednak na posiadanie większej intuicji, skracając czasami wielokrotnie czas myślenia nad zadaniem.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Założenia jak w zadaniu 2., pokazać, że
$$\frac{AP}{PX} \cdot \frac{BP}{PY} \cdot \frac{CP}{PZ} \geqslant 8.$$
2. Znaleźć środek masy *obwodu* trójkąta.
3. M jest środkiem ciężkości trójkąta ABC. Wykazać, że
$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(MA^2 + MB^2 + MC^2).$$
4. W wierzchołkach czworokąta umieszczono równe masy. Gdzie znajduje się środek masy takiego układu?

7. Wzory z tablic: tw. sinusów, cosinusów (uwierzcie przydaje się), Herona

Wszystkie zadania są pobrane ze Staszica. Mam jeszcze zadania z Pompe, ale inne niż na stronie postaram się je przepisać i wrzucić.