Średnie — dowód

Joachim Jelisiejew
15 listopada 2011

Definicja 1.1. *Niech liczby $a_1, \dots, a_n$ będą dodatnie.*
Definiujemy średnie:

1. *Harmoniczną:* $H_n(a_1, \dots, a_n) := \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}$. *np.* $H_3(a, b, c) = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.
2. *Geometryczną:* $G_n(a_1, \dots, a_n) := \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$, *np.* $G_6(q, w, e, r, t, y) = \sqrt[6]{qwerty}$.
3. *Arytmetyczną:* $A_n(a_1, \dots, a_n) := \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$, *np.* $A_2(x, y) = \frac{x+y}{2}$.
4. *Kwadratową:* $K_n(a_1, \dots, a_n) := \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}}$, *np.* $K_4(1, 2, 3, 4) = \sqrt{\frac{1+4+9+16}{4}}$.

Celem tego kółka jest udowodnienie następującego twierdzenia (w wersji bez gwiazdki, dla $n \leqslant 4$):

Twierdzenie 1.2 (Nierówność pomiędzy średnimi)**.** *Jeżeli liczby $a_1, \dots, a_n$ są dodatnie, to*

$$H_n(a_1, \dots, a_n) \leqslant G_n(a_1, \dots, a_n) \leqslant A_n(a_1, \dots, a_n) \leqslant K_n(a_1, \dots, a_n).$$

Zadanie 1

Na początku udowodnisz nierówność $G_n \leqslant A_n$.

1. Udowodnij, że $G_2(a_1, a_2) \leqslant A_2(a_1, a_2)$.
2. Udowodnij nierówność $G_4(a_1, a_2, a_3, a_4) \leqslant A_4(a_1, a_2, a_3, a_4)$.
   Zauważ, że $G_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = G_2(G_2(a_1, a_2), G_2(a_3, a_4))$. Zastosuj $G_2 \leqslant A_2$.
3. Udowodnij nierówność $G_3(a_1, a_2, a_3) \leqslant A_3(a_1, a_2, a_3)$.
   Przekształć nierówność $G_4(a_1, a_2, a_3, A_3(a_1, a_2, a_3)) \leqslant A_4(a_1, a_2, a_3, A_3(a_1, a_2, a_3))$.
4. $\star$. Uogólnij poprzednie podpunkty aby udowodnić, że jeśli $G_n \leqslant A_n$ to $G_{2n} \leqslant A_{2n}$ oraz $G_{n-1} \leqslant A_{n-1}$. Wywnioskuj, że $G_n \leqslant A_n$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \geqslant 1$ stosując np. dziwny rodzaj indukcji.

Zadanie 2

Udowodnij, że

1. $H_n(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}) = A_n(a_1, \dots, a_n)^{-1}$
2. $G_n(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}) = G_n(a_1, \dots, a_n)^{-1}$.
3. $H_n \leqslant G_n$. *Zastosuj $G_n \leqslant A_n$ dla odwrotności.*

Zadanie 3

Udowodnij $A_n \leqslant K_n$, podnosząc obie strony do kwadratu. Jeżeli masz problemy, spróbuj najpierw dla $n = 2$, potem ewentualnie $n = 3$.