Czy wiesz, co to średnie?

Teoria

1. Jeżeli liczby $a_1, \cdots, a_n$ są dodatnie, to

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

   Pierwsze wyrażenie nazywamy średnią harmoniczną, drugie geometryczną, trzecie arytmetyczną, a ostatnie kwadratową.

2. Dla dwóch liczb wygląda to nieco niewinniej: Jeśli $a, b > 0$, to

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

3. Do rządzenia służy tzw. średnia ważona:
   Jeżeli liczby $a_1, \cdots, a_n, w_1, \cdots, w_n$ są dodatnie, i $w_1 + \cdots + w_n = 1$, to:

$$\frac{1}{\frac{w_1}{a_1}+\cdots+\frac{w_n}{a_n}} \leq a_1^{w_1} a_2^{w_2} \cdots a_n^{w_n} \leq w_1 a_1 + w_2 a_2 + \cdots + w_n a_n$$

4. **Umowa** Jeżeli mamy liczby $a_1, \cdots, a_n$ w zadaniu (a nie mamy a_{n+1}) to umawiamy się, że $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ itd.

Zadania

1. Pokaż, że dla niezerowych liczb jednego znaku $a_1, a_2, \cdots, a_n$, zachodzi $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$.
   Rozwiązanie:
   Skoro a_n są jednego znaku, to $\frac{a_i}{a_{i+1}} > 0$ dla wszystkich i. Stąd i z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$\frac{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \cdots \cdot \frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[n]{1} = 1$$

   Stąd już wynika teza.

2. Pokaż, bez głupich obliczeń, że jeżeli $a, b, c > 0$, to $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.
   Rozwiązanie:
   Mamy, z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$$

$$\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$$

   Mnożąc te 3 nierówności stronami i mnożąc otrzymaną nierówność przez 8 dostajemy tezę.

3. Analogicznie jak powyżej, udowodnij, że $(a+b)^4 \geq 8ab(a^2+b^2)$.
Rozwiązanie:
Mamy $(a+b)^4 = (a^2+2ab+b^2)^2$. Ponadto
$$\frac{(a^2+b^2)+2ab}{2} \geq \sqrt{2ab(a^2+b^2)}$$
Stąd
$$(a+b)^4 = 4 \cdot (\frac{a^2+2ab+b^2}{2})^2 \geq 4 \cdot 2ab(a^2+b^2) = 8ab(a^2+b^2)$$

4. Udowodnij, że dla dowolnych a, b, c dodatnich zachodzi
$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$
Rozwiązanie:
Z nierówności między średnia harmoniczną i arytmetyczną dla liczb $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$ jest
$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}}{3} \geq \frac{3}{\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a}}$$
Po przekształceniu (wymnożeniu stronami przez mianowniki i podzieleniu przez $a+b+c$) otrzymujemy tezę.

5. Udowodnij, że dla $a, b \in \mathbb{R}$ jest
$$4b^2 + a^2 \geq 4ab$$
Rozwiązanie:
Z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dla liczb $a^2, 4b^2$ otrzymujemy
$$\frac{a^2+4b^2}{2} \geq \sqrt{4a^2b^2} = 2ab$$

6. Udowodnij, że dla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ jest
$$abcd - \frac{1}{16} \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^4}{4} + \frac{c^8}{8} + \frac{d^{16}}{16}$$
Rozwiązanie:
Po przekształceniu (nie ma niejsca dla minusów w nierównościach) teza przymuje postać $abcd \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^4}{4} + \frac{c^8}{8} + \frac{d^{16}}{16} + \frac{1}{16}$.
Wynika ona z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną ważoną dla liczb $a^2, b^4, c^8, d^16, 1$ i wag $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}$ otrzymujemy:
$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^4}{4} + \frac{c^8}{8} + \frac{d^{16}}{16} + \frac{1}{16} \geq a^{2\frac{1}{2}} b^{4\frac{1}{4}} c^{8\frac{1}{8}} d^{16\frac{1}{16}} 1^{\frac{1}{16}} = abcd$$
Zauważmy, że to samo otrzymamy biorąc średnią arytmetyczną i geometryczną z 16 liczb $\underbrace{\frac{a^2}{16}, \frac{a^2}{16}, \dots, \frac{a^2}{16}}_{8}, \frac{b^4}{16}, \frac{b^4}{16}, \frac{b^4}{16}, \frac{b^4}{16}, \frac{c^8}{16}, \frac{c^8}{16}, \frac{d^{16}}{16}, \frac{1}{16}$. Średnie ważone, o ile wagi są wymierne, to po prostu wygodniej zapisane średnie zwykłe.

7. Rozstrzygnij, jaka jest największa stała C, taka, że dla wszystkich dodatnich x, y, z jest
$$x + 2y + 3z \geq Cx^{\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{2}}$$
Rozwiązanie:
Dla $x = y = z = 1$ mamy nierówność $6 \geq C$, stąd musi być $C \leq 6$.
Udowodnimy, że $C = 6$. Faktycznie, ze średniej arytmetycznej i geometrycznej dla x, y, y, z, z, z mamy
$$\frac{x+y+y+z+z+z}{6} \geq \sqrt[6]{xy^2z^3} = x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{2}}$$
Stąd po przekształceniu otrzymujemy $x + 2y + 3z \geq 6x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{2}}$, dowodzi, że $C \geq 6$, a więc $C = 6$.

8. Pokazać, że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ zachodzi

$$a + b + c + d \geq \frac{15}{2^{\frac{34}{15}}} \sqrt[15]{ab^2c^4d^8}$$

Rozwiązanie:
Teza wynika wprost z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dla liczb $a, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{4}, \frac{c}{4}, \frac{c}{4}, \frac{c}{4}, \underbrace{\frac{d}{8}, \cdots, \frac{d}{8}}_{8}$:

$$\frac{a+b+c+d}{15} = \frac{a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{c}{4} + \frac{c}{4} + \frac{c}{4} + \underbrace{\frac{d}{8}, \cdots, \frac{d}{8}}_{8}}{15} \geq \sqrt[15]{a(\frac{b}{2})^2(\frac{c}{4})^4(\frac{d}{8})^8}$$

Inaczej mówiąc stosujemy tutaj średnią ważoną między średnią arytmetyczną a geometryczną dla liczb $a, \frac{b}{2}, \frac{c}{4}, \frac{d}{8}$ i wag $\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}$.

9. Pokazać, że jeśli $a, b, c > 0$, to $a^2 + b^2 + c^2 + 2a + 2b + 2c \geq 3((ab)^{\frac{2}{3}} + (bc)^{\frac{2}{3}} + (ca)^{\frac{2}{3}})$ **Rozwiązanie**:
Z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną otrzymujemy

$$\frac{a^2 + b + b}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot b \cdot b} = (ab)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{b^2 + c + c}{3} \geq \sqrt[3]{b^2 \cdot c \cdot c} = (bc)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{c^2 + a + a}{3} \geq \sqrt[3]{c^2 \cdot a \cdot a} = (ca)^{\frac{2}{3}}$$

Po ich zsumowaniu dostajemy tezę.

10. Pokazać, że jeżeli $x, y, z > 0$, to

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}$$

Rozwiązanie:
Po podniesieniu obu stron nierówności do kwadratu otrzymujemy $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$. To wynika z nierówności $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, którą udowadniamy przy pomocy średnich.

11. (Czy pamiętasz co się robi w trójkątach?) Wykaż, że jeżeli a, b, c - boki pewnego trójkąta, to

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Rozwiązanie:
Weźmy $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{a+c-b}{2}$,$z = \frac{a+b-c}{2}$. Z tego, że a, b, c - boki trójkąta wynika, że $x, y, z > 0$. Teza jest równoważna, po podstawieniu

$$\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6$$

Można ją otrzymać sumując 3 nierówności (prawdziwe na mocy śr. aryt. i geom.)

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$$

$$\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2$$

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$$

12. Liczby dodatnie a, b, c, są takie, że $a+b+c=1$. Wykazać, że

$$a^2+b^2+c^2+\sqrt{12abc} \leq 1$$

Rozwiązanie:
Musimy sprowadzić wszystkie części wyrażenia do wspólnego stopnia (inaczej mówiąc otrzymać wyrażenie jednorodne). $a^2+b^2+c^2$ ma stopień 2, $\sqrt{12abc}$ ma stopień $\frac{3}{2}$, a 1 ma stopień 0. Podstawiamy więc i otrzymujemy:

$$a^2+b^2+c^2+\sqrt{12abc(a+b+c)} \leq (a+b+c)^2$$

Po rozbiciu $(a+b+c)^2$ i redukcji to wyrażenie przyjmuje postać $\sqrt{3abc(a+b+c)} \leq ab+bc+ca$. Po podstawieniu $x=ab, y=bc, z=ca$ i podniesieniu do kwadratu otrzymujemy nierówność $3(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2$, którą udowadniamy bezpośrednio.

13. Udowodnić, że jeśli $a, b, c > 0$ i $a+b+c=1$, to

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$$

Rozwiązanie:
Podstawiamy wszędzie $1=a+b+c$ i otrzymujemy

$$(b+c+2a)(a+c+2b)(a+b+2c) \geq 8(a+b)(b+c)(c+a)$$

Jeżeli podstawimy teraz $x=a+b, y=a+c, z=b+c$ to otrzymujemy nierówność $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$, która była już wcześniej udowodniona.

14. (LVII OM - 2 etap) Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab+bc+ca=abc$. Dowieść, że:

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(a^3+c^3)} \geq 1$$

Rozwiązanie:
Po lewej stronie mamy stopień -1, po prawej 0. Mnożymy lewą stronę przez abc, a prawą przez $ab+bc+ca$, żeby otrzymać równe stopnie:

$$\frac{c(a^4+b^4)}{a^3+b^3}+\frac{a(b^4+c^4)}{b^3+c^3}+\frac{b(c^4+a^4)}{a^3+c^3} \geq ab+bc+ca$$

Zauważmy, że

$$\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} \geq \frac{a+b}{2}$$

(po wymnożeniu przez mianowniki i zredukowaniu wychodzi $(a^3-b^3)(a-b) \geq 0$, czyli $(a^2+ab+b^2)(a-b)^2 \geq 0$). Stosując tę nierówność do 3 członów otrzymujemy

$$\frac{c(a^4+b^4)}{a^3+b^3}+\frac{a(b^4+c^4)}{b^3+c^3}+\frac{b(c^4+a^4)}{a^3+c^3} \geq c\frac{a+b}{2}+a\frac{b+c}{2}+b\frac{a+c}{2}=ab+bc+ca$$

15. Niech $a_1, \cdots, a_n$ będą liczbami dodatnimi spełniającymi warunek $a_1 a_2 \cdots a_k \geq 1$ dla każdego $1 \leq k \leq n$. Udowodnić, że:

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} < 2$$

Rozwiązanie:
Mamy

$$\frac{k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} \leq \frac{k}{(2\sqrt{a_1})\cdots(2\sqrt{a_k})}=\frac{k}{2^k}\frac{1}{\sqrt{a_1\cdots a_k}} \leq \frac{k}{2^k}$$

Stosując to oszacowanie uzyskujemy

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \leq \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\frac{n}{2^n}$$

Mamy, dla wszystkich k naturalnych, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}<1$, stąd

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\frac{n}{2^n}=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{2^n})+(\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{2^n})+(\frac{1}{8}\cdots\frac{1}{2^n})+\cdots\frac{1}{2^n}<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}<1+1=2$$

16. (*) Niech $a_1, \cdots, a_n$ - liczby dodatnie, zaś S - ich suma. Udowodnić, że prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{S - a_i}{a_i} \geq (n-1)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S - a_i}$$

Rozwiązanie:
Z nierówności pomiędzy średnią harmoniczną a arytmetyczną dla $a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n$ mamy $\frac{n-1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{i-1}}+\frac{1}{a_{i+1}}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \frac{a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_n}{n-1} = \frac{S-a_i}{n-1}$. Stąd po przekształceniach:

$$\frac{(n-1)^2}{S - a_i} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{i-1}} + \frac{1}{a_{i+1}} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

Stąd

$$a_i \frac{(n-1)^2}{S - a_i} \leq \frac{a_i}{a_1} + \frac{a_i}{a_2} + \cdots + \frac{a_i}{a_{i-1}} + \frac{a_i}{a_{i+1}} + \cdots + \frac{a_i}{a_n}$$

Sumując po i otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{(n-1)^2}{S - a_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{a_i}{a_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{S - a_j}{a_j}$$