Wzory skróconego mnożenia

Teoria Dla liczb $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

1. $$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

2. $$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$$

3. Jeżeli $2 \not| n$ to
$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1})$$

4. * Dla liczb zespolonych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi jeszcze np.
$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + \mathrm{i}\, z_2)(z_1 - \mathrm{i}\, z_2)$$
gdzie i jest jednostką urojoną (*patrz kółko o zespolonych z 2008r.*).

Te wszystkie własności są bardzo ogólne – dowody są na poziomie algebry, co znaczy, że można stosować w wielu sytuacjach. *Na poziomie licealnym wzory skróconego mnożenia stosuje się głównie dla liczb całkowitych, wielomianów całkowitych itp.*

Wnioski

1. Jeżeli liczby $a \neq b$ są całkowite, to
$$a - b | a^n - b^n$$
dla wszystkich naturalnych n. W szczególności
$$a - 1 | a^n - 1$$
$$a + 1 | a^{2k+1} + 1$$

2. Jeżeli wielomian W ma współczynniki całkowite to
$$a - b | W(a) - W(b)$$
dla wszystkich liczb całkowitych $a \neq b$.

3. (twierdzenie Bèzout) dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi
$$x - a | W(x) - W(a)$$
gdzie napis $r(x)|s(x)$ oznacza, że istnieje taki wielomian $q(x)$, że $s(x) = r(x)q(x)$. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla liczby całkowitej a i wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Zadania

1. (ważne!) Uzasadnić, że jeżeli liczba
$$2^k + 1$$
jest pierwsza, to $k = 2^l$ dla pewnego $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

2. Uzasadnić, bez trudnych obliczeń, że
$$43 | 6^4 + 6^2 + 1$$

3. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite n, dla których
$$n^n + 1 \text{ oraz } (2n)^{2n} + 1$$
są liczbami pierwszymi.
Źródło: LVI OM

4. Niech q będzie liczbą parzystą dodatnią. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n liczba
$$q^{(q+1)^n} + 1$$
dzieli się przez $(q+1)^{n+1}$ ale nie dzieli się przez $(q+1)^{n+2}$.
Źródło: XXXIII OM, via artykuł H. Pawłowskiego

5. Udowodnić, że zachodzi $x^2 + x + 1 | x^{1985} + x + 1$, a dokładniej, że istnieje taki wielomian $p(x)$ o współczynnikach całkowitych, że
$$x^{1985} + x + 1 = (x^2 + x + 1)p(x)$$
(w założeniu należy to zrobić bez wyliczania $p(x)$).