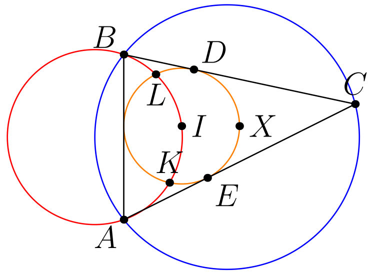

Mikrokosmos w kropli wody (czyli w jednym rysunku)

kółko I LO Białystok
8 lutego 2012

1.1 Ostatki

Zadanie 1
Seba, Ty wredoto, siedziałem nad tym trzy godziny!
Niech $\triangle ABC$ będzie trójkątem.

1. Niech M będzie środkiem BC, niech okrąg wpisany w $\triangle ABC$ będzie styczny do BC w D, a okrąg dopisany do boku BC trójkąta $\triangle ABC$ będzie styczny do BC w D'. Uzasadnij, że punkty D, D' są symetryczne względem M.
2. W dalszej części zadania zakładamy, że $CD = AB$. Niech F będzie punktem styczności okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ to AB. Wykaż, że $AD' \parallel DF$. Pokaż też, że $BF' \parallel EF$, gdzie F' jest punktem styczności okręgu dopisanego do boku AC trójkąta ABC z AC.
3. Uzasadnij, że $K \in AE'$ i $L \in BF'$, gdzie K, L są symetryczne do odpowiednio D, E względem I.
4. Uzasadnij, że proste AK i BL przecinają się w punkcie X symetrycznym do F względem I.
5. Wykaż, że $KX \cdot AX = FX^2 = LX \cdot BX$ i wywnioskuj, że punkty A, K, L, B leżą na jednym okręgu. *A jeszcze dzisiaj myślałem, że ten warunek nie ma sensu tutaj...*

Całe zadanie można było zrobić też stosując metodę środka masy.

1.2 Troszkę wzorków skróconego mnożenia

Zadanie 2
Uzasadnij, że $a - b \big| W(a) - W(b)$, gdzie W jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, $a \neq b$ są liczbami całkowitymi.

Zadanie 3
Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Załóżmy, że liczba pierwsza p dzieli $a + b$, a n jest nieparzyste i niepodzielne przez p. Uzasadnij, że potęga p dzieląca $a^n + b^n$ jest taka sama jak potęga p dzieląca $a + b$. Czy byłoby to prawdą bez założenia, że n jest nieparzyste? A bez założenia, że jest niepodzielne przez p?

Zadanie 4
Uzasadnij, że jeśli $p > 20$ jest pierwsza, to $13 \big| 2^p + 11^p$, ale $13^2 \not\big| 2^p + 11^p$

Zadanie 5
Liczba $2^k + 1$ jest pierwsza ($k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$). Uzasadnij, że $k = 2^l$, gdzie l jest całkowite.

Zadanie 6
Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite n, dla których

$$n^n + 1 \text{ oraz } (2n)^{2n} + 1$$

są liczbami pierwszymi. *Źródło: LVI OM*

Zadanie 7
Niech q będzie liczbą parzystą dodatnią. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$q^{(q+1)^n} + 1$$

dzieli się przez $(q + 1)^{n+1}$ ale nie dzieli się przez $(q + 1)^{n+2}$. *Źródło: XXXIII OM, via artykuł H. Pawłowskiego*

Zadanie 8

Uzasadnij, że jeżeli funkcje $f, g : \mathbb{Z}^{2011} \to \mathbb{Z}^{2011}$ spełniają $f(g(x)) = g(f(x))$ dla każdego x oraz $f(a-b) = f(a) - f(b), g(a-b) = g(a) - g(b)$ dla każdych $a, b \in \mathbb{Z}^{2011}$, to

$$f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x) = h(f(x) - g(x))$$

dla każdego $x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, gdzie $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ jest pewną funkcją, a $f^{(n)}$ oznacza n-krotne złożenie f.

Zadanie 9

Różne wielomiany P, Q o współczynnikach rzeczywistych spełniają warunek $P(Q(x)) = Q(P(x))$ dla każdego x.

Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n wielomian $P^{(n)}(x) - Q^{(n)}(x)$ jest podzielny przez $P(x) - Q(x)$.

Uwaga: wielomian F jest podzielny przez G, jeżeli istnieje H taki, że $F(x) = G(x) \cdot H(x)$ dla każdego x. Oznaczenie $P^{(n)}$ oznacza n-krotne złożenie wielomianu P.